



مجمع آموزش عالی گناباد

ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت

با نگاهی به اقتصاد مقاومتی و مدیریت جهادی

دکتر مجید کوکبی

عضو هیأت علمی مجتمع آموزش عالی گناباد

۱۶ خرداد ۱۴۰۵

فهرست مطالب

پیشگفتار

ث

۱	توابع چندمتغیره: از یک متغیر تا فضای تصمیم
۱	۱.۱ چرا توابع چندمتغیره؟
۱	۱.۱.۱ نمودار و سطح تراز
۱	۲.۱.۱ مشتقات جزئی
۲	۳.۱.۱ قاعده زنجیری
۵	۲ بهینه‌سازی بدون قید و با قید
۵	۱.۲ نقاط بحرانی و آزمون مشتق دوم
۵	۲.۲ روش لاگرانژ (بهینه‌سازی با قید)
۷	۳ بردارها و فضاهای برداری
۷	۱.۳ بردار در مدیریت
۷	۱.۱.۳ ضرب داخلی و زاویه بین بردارها
۹	۴ ماتریس‌ها و تبدیلات خطی
۹	۱.۴ عملیات ماتریسی
۹	۲.۴ ماتریس معکوس و حل دستگاه
۱۱	۵ دترمینان و کاربردهای هندسی
۱۱	۱.۵ تفسیر هندسی دترمینان
۱۳	۶ مقادیر ویژه: نوسان‌های مدیریتی
۱۳	۱.۶ تعریف و محاسبه
۱۳	۲.۶ کاربرد در پایداری سیستم‌ها
۱۵	۷ انتگرال معین و کاربردهای آن
۱۵	۱.۷ مساحت زیر منحنی
۱۵	۲.۷ مازاد مصرف‌کننده و تولیدکننده
۱۷	۸ انتگرال‌های چندگانه
۱۷	۱.۸ حجم زیر سطح
۱۹	۹ معادلات دیفرانسیل در مدیریت
۱۹	۱.۹ رشد نمایی و لجستیک
۲۱	۱۰ اقتصاد مقاومتی و ریاضیات کاربردی (فصل ویژه)
۲۱	۱.۱۰ بهینه‌سازی منابع با رویکرد جهادی
۲۱	۱.۱.۱۰ مثال عددی
۲۱	۲.۱۰ مدیریت جهادی و تابع هزینه

۲۳	۱۱ پیوست الف: جزوه انتگرال خور (یادآوری روش‌ها)
۲۳	پیوست الف: جزوه انتگرال خور
۲۳	۱.۱۱ انتگرال‌های فوری
۲۳	۲.۱۱ روش تغییر متغیر
۲۳	۳.۱۱ انتگرال‌گیری جزء به جزء
۲۳	۴.۱۱ انتگرال توابع گویا (کسرهای جزئی)
۲۵	۱۲ نمونه سوالات امتحانی جامع با پاسخ تشریحی
۲۷	منابع و مراجع
۳۱	پاسخ‌های تشریحی
۳۱	کتاب انتگرال خور (فایل پیوندی)
۳۷	پیوست: کتاب انتگرال خور
۱۴۶	جزوه عرفانیان (فایل پیوندی)

پیشگفتار

بسم الله الرحمن الرحيم. این جزوه حاصل تدریس ریاضیات برای دانشجویان مدیریت در مجتمع آموزش عالی گناباد است. هدف، آموزش مفاهیم پایه و کاربردی ریاضی با زبانی ساده، همراه با مثال‌های مدیریتی واقعی و گاهی طنزآمیز اما در چارچوب اخلاق حرفه‌ای است. تأکید ویژه بر بهینه‌سازی منابع با الهام از اقتصاد مقاومتی و مدیریت جهادی داریم. امید که این تلاش کوچک، گامی در جهت توانمندسازی مدیران آینده کشور باشد.

فصل ۱

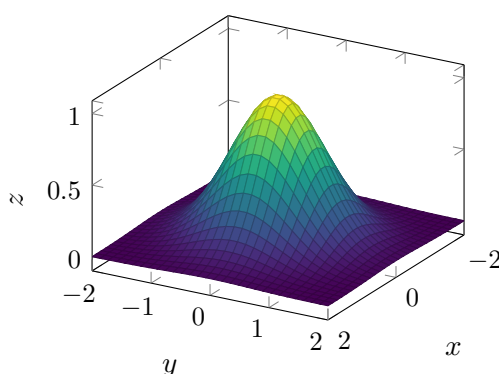
توابع چندمتغیره: از یک متغیر تا فضای تصمیم

۱.۱ چرا توابع چندمتغیره؟

در مدیریت، سود یک بنگاه به عوامل متعددی بستگی دارد: قیمت محصول (p)، هزینه مواد اولیه (c)، تعداد نیروی کار (L)، سرمایه (K) و غیره. بنابراین تابع سود به صورت $\pi(p, c, L, K, \dots)$ تعریف می‌شود. در این فصل با مفاهیم پایه توابع چندمتغیره آشنا می‌شویم.

۱.۱.۱ نمودار و سطح تراز

تابع $z = f(x, y)$ یک سطح در فضای سه‌بعدی است. سطح تراز مجموعه نقاطی در صفحه xy است که $f(x, y) =$ ثابت.

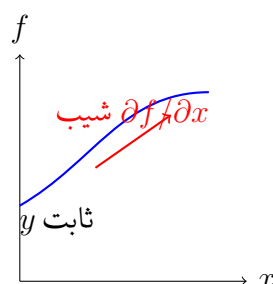


شکل ۱-۱: سطح تابع $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ (قله مرکزی)

۲.۱.۱ مشتقات جزئی

مشتق جزئی نسبت به x ، نرخ تغییر تابع را وقتی فقط x تغییر می‌کند نشان می‌دهد:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

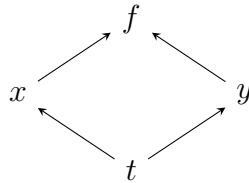


شکل ۱-۲: تفسیر هندسی مشتق جزئی

۳.۱.۱ قاعده زنجیری

اگر $x = x(t)$ و $y = y(t)$ ، آنگاه:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$



شکل ۱-۳: نمودار درختی قاعده زنجیری

تمرین‌های حل شده فصل ۱ (اصلی)

۱. تابع $f(x, y) = x^2y + 3xy^2$ را در نظر بگیرید. مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم را بیابید. حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 6y$$

۲. تابع تولید $Q(K, L) = 20K^{0.4}L^{0.6}$ را در نظر بگیرید. کشش تولید نسبت به نیروی کار $(\frac{L}{Q} \frac{\partial Q}{\partial L})$ را محاسبه کنید. حل:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = 20K^{0.4} \times 0.6L^{-0.4} = 12K^{0.4}L^{-0.4}$$

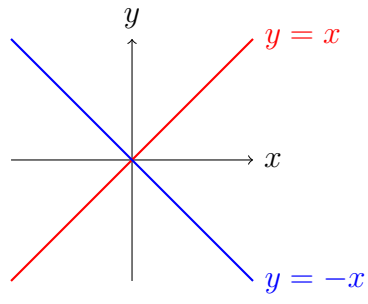
کشش $= \frac{L}{Q} \times 12K^{0.4}L^{-0.4} = \frac{12L^{0.6}}{20K^{0.4}L^{0.6}} \times K^{0.4} = \frac{12}{20} = 0.6$ یعنی به ازای ۱٪ افزایش نیروی کار، تولید ۰.۶٪ افزایش می‌یابد.۳. قاعده زنجیری را برای $f(x, y) = x^2 + y^2$ ، $x(t) = \sin t$ ، $y(t) = \cos t$ بنویسید و $\frac{df}{dt}$ را در $t = \pi/4$ محاسبه کنید. حل: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ ، $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ ، $\frac{dx}{dt} = \cos t$ ، $\frac{dy}{dt} = -\sin t$

$$\frac{df}{dt} = 2x \cos t - 2y \sin t = 2 \sin t \cos t - 2 \cos t \sin t = 0$$

بنابراین f در طول این مسیر ثابت است (چون $x^2 + y^2 = 1$).

تمرین‌های اضافی فصل ۱ با پاسخ

۱. برای تابع $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ، مشتقات جزئی مرتبه اول را بیابید. پاسخ: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$ ۲. اگر $z = e^{xy}$ و $x = 2t$ ، $y = t^2$ باشد، $\frac{dz}{dt}$ را محاسبه کنید. پاسخ: $\frac{dz}{dt} = e^{xy}(y \cdot 2 + x \cdot 2t) = 2e^{2t^3}(t^2 + 2t^2) = 6t^2e^{2t^3}$ ۳. سطح تراز تابع $f(x, y) = x^2 - y^2$ برای مقدار ثابت $c = 0$ چیست؟ رسم کنید. پاسخ: $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) = 0$ ، دو خط $y = x$ و $y = -x$.



فصل ۲

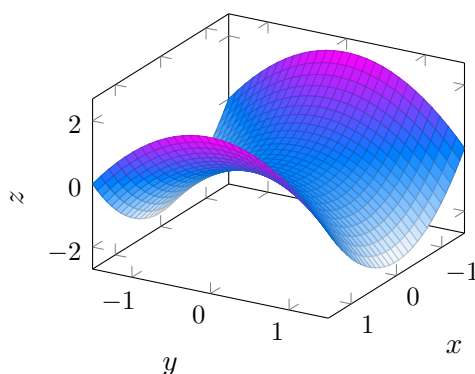
بهینه‌سازی بدون قید و با قید

۱.۲ نقاط بحرانی و آزمون مشتق دوم

برای تابع $f(x, y)$ ، نقاط بحرانی از حل دستگاه $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ به دست می‌آیند. نوع نقطه با ماتریس هسین مشخص می‌شود:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

- اگر H معین مثبت (همه مقادیر ویژه مثبت) $\Rightarrow$ مینیمم محلی. - اگر H معین منفی (همه مقادیر ویژه منفی) $\Rightarrow$ ماکزیمم محلی. - اگر H نامعین (مقادیر ویژه مثبت و منفی) $\Rightarrow$ نقطه زینی.



شکل ۱-۲: نقطه زینی $f(x, y) = x^2 - y^2$

۲.۲ روش لاگرانژ (بهینه‌سازی با قید)

برای مسئله $\max f(x, y)$ تحت قید $g(x, y) = c$ ، تابع لاگرانژ را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(c - g(x, y))$$

شرایط مرتبه اول:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

مثال مدیریتی با اقتصاد مقاومتی

فرض کنید تابع سود یک کارگاه تولیدی $\pi(x, y) = 100x^{0.5}y^{0.5}$ باشد که x نیروی کار و y سرمایه است. بودجه کل ۲۰۰ میلیون تومان است و قیمت نیروی کار ۲ میلیون و قیمت سرمایه ۱۰ میلیون تومان. قید: $2x + 10y = 200$. با روش لاگرانژ:

$$\mathcal{L} = 100x^{0.5}y^{0.5} + \lambda(200 - 2x - 10y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} : 50x^{-0.5}y^{0.5} = 2\lambda, \quad \frac{\partial}{\partial y} : 50x^{0.5}y^{-0.5} = 10\lambda$$

تقسیم دو معادله: $\frac{y}{x} = \frac{2}{10} = 0.2 \Rightarrow y = 0.2x$ در قید: $2x + 10(0.2x) = 2x + 2x = 4x = 200 \Rightarrow x = 50$, $y = 10$. سود بهینه: $100(50^{0.5})(10^{0.5}) = 100\sqrt{500} = 100 \times 22.36 = 2236$ میلیون تومان.

تمرین‌های حل شده فصل ۲

۱. نقاط بحرانی و نوع آنها را برای $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ بیابید. حل: $f_x = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$, $f_y = 3y^2 - 12 = 0 \Rightarrow y = \pm 2$. نقاط: $(1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$. مشتقات دوم: $f_{xx} = 6x, f_{yy} = 6y, f_{xy} = 0$. در $(1, 2)$: $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36 \times 2 = 72 > 0$. در $(-1, -2)$: $D = 36 \times (-2) = -72 < 0$. در $(1, -2)$: $D = 36 \times 2 = 72 > 0$. در $(-1, 2)$: $D = 36 \times (-2) = -72 < 0$. $f_{xx} = 6 > 0$ مینیمم محلی. $f_{xx} = -6 < 0$ ماکزیمم محلی.

۲. تحت قید $x + y = 4$, مقدار ماکزیمم $f(x, y) = xy$ را بیابید. حل: از قید $y = 4 - x$, $f = x(4 - x) = 4x - x^2$. مشتق: $4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$, سپس $y = 2$. مقدار ماکزیمم ۴. (روش لاگرانژ نیز به همین نتیجه می‌دهد.)

تمرین‌های اضافی فصل ۲ با پاسخ

۱. تابع $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y + 7$ را در نظر بگیرید. نقاط بحرانی و نوع آن را بیابید. پاسخ: $f_x = 2x + y - 4 = 0, f_y = x + 2y - 2 = 0$. حل: از اول $y = 4 - 2x$ در دوم: $x + 8 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow -3x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2, y = 0$. $f_{xx} = 2, f_{yy} = 2, f_{xy} = 1$. $D = 4 - 1 = 3 > 0$ و $f_{xx} > 0$ مینیمم محلی.

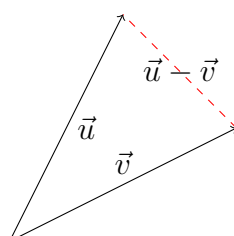
۲. با روش لاگرانژ، حد اکثر $f(x, y) = x^2 + y^2$ را تحت قید $x + 2y = 5$ بیابید. پاسخ: $\mathcal{L} = x^2 + y^2 + \lambda(5 - x - 2y)$. مشتقات: $2x - \lambda = 0, 2y - 2\lambda = 0 \Rightarrow x = \lambda/2, y = \lambda$. مقدار تابع $\lambda/2 + 2\lambda = 5 \Rightarrow 2.5\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = 2, x = 1, y = 2$ (حد اقل است چون تابع محدب است).

فصل ۳

بردارها و فضاهای برداری

۱.۳ بردار در مدیریت

بردارها برای نمایش همزمان چند متغیر استفاده می‌شوند. در مدیریت، بردار استراتژی، بردار منابع، بردار عملکرد و غیره.



شکل ۳-۱: جمع و تفریق بردارها در صفحه

۱.۱.۳ ضرب داخلی و زاویه بین بردارها

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

در مدیریت، اگر $\vec{a}$ نشان‌دهنده اهداف و $\vec{b}$ نشان‌دهنده اقدامات باشد، ضرب داخلی مثبت نشان‌دهنده همسویی است.

تمرین

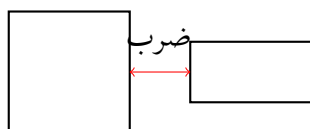
برای $\vec{a} = (1, 2, 3)$ و $\vec{b} = (4, -5, 6)$ ، ضرب داخلی و زاویه را بیابید. **حل:** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 4 + 2 \times (-5) + 3 \times 6 = 4 - 10 + 18 = 12$
 $\cos \theta = \frac{12}{\sqrt{14}\sqrt{77}} = \frac{12}{\sqrt{1078}} \approx 0.365$ $\theta \approx 68.6^\circ$

فصل ۴

ماتریس‌ها و تبدیلات خطی

۱.۴ عملیات ماتریسی

ماتریس $A_{m \times n}$ جدولی از اعداد با m سطر و n ستون است. ضرب ماتریس فقط زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های اولی برابر سطرهای دومی باشد.



شکل ۴-۱: ضرب ماتریس $A_{2 \times 2}$ در $B_{2 \times 1}$

۲.۴ ماتریس معکوس و حل دستگاه

دستگاه $A\vec{x} = \vec{b}$ را با $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ حل می‌کنیم. ماتریس A معکوس پذیر است اگر $\det A \neq 0$.

تمرین

دستگاه زیر را با روش ماتریسی حل کنید:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

حل: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = .A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ ، $\det A = 4 - 6 = -2$ ، $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

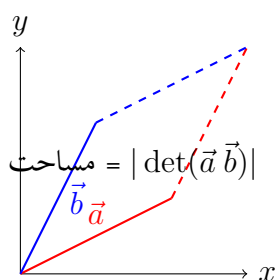
پاسخ: $x = -4$ ، $y = 4.5$. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 + 6 \\ 7.5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4.5 \end{pmatrix}$

فصل ۵

دترمینان و کاربردهای هندسی

۱.۵ تفسیر هندسی دترمینان

دترمینان یک ماتریس 2×2 ، مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده توسط ستون‌های ماتریس را می‌دهد. برای ماتریس 3×3 ، حجم متوازی السطوح.



شکل ۵-۱: دترمینان به عنوان مساحت

تمرین

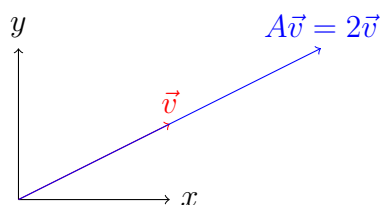
مساحت متوازی الاضلاع با رئوس $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$, $(1, 3)$ را با دترمینان بیابید. **حل:** دو بردار از مبدأ: $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (1, 3)$. ماتریس $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ، $\det M = 6 - 1 = 5$ ، مساحت $= 5$.

فصل ۶

مقادیر ویژه: نوسان‌های مدیریتی

۱.۶ تعریف و محاسبه

برای ماتریس A ، عدد λ و بردار ناصفر $\vec{v}$ به گونه‌ای که $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ، مقدار ویژه و بردار ویژه است.



شکل ۶-۱: اثر ماتریس بر بردار ویژه (کشش)

۲.۶ کاربرد در پایداری سیستم‌ها

در مدل‌های پویای مدیریت، اگر همه مقادیر ویژه ماتریس سیستم قدرمطلق کمتر از ۱ داشته باشند، سیستم به سمت تعادل پایدار میل می‌کند.

تمرین

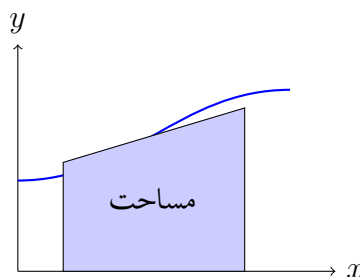
مقادیر ویژه $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ را بیابید. حل: $\lambda = 1, 3$. $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 3$.

فصل ۷

انتگرال معین و کاربردهای آن

۱.۷ مساحت زیر منحنی

$$\int_a^b f(x)dx = \text{مساحت زیر منحنی } f \text{ از } a \text{ تا } b$$



شکل ۷-۱: انتگرال معین به عنوان مساحت

۲.۷ مازاد مصرف‌کننده و تولیدکننده

در اقتصاد، مازاد مصرف‌کننده برابر است با $\int_0^{Q_0} (D(Q) - P_0)dQ$ و مازاد تولیدکننده $\int_0^{Q_0} (P_0 - S(Q))dQ$.

تمرین

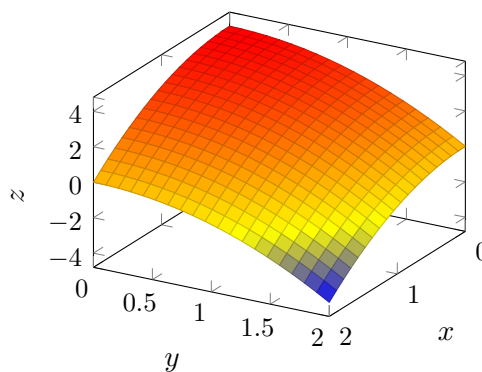
اگر تابع تقاضا $D(Q) = 100 - 2Q$ و قیمت تعادلی $P_0 = 60$ باشد، مازاد مصرف‌کننده را محاسبه کنید. **حل:**
 $D(Q) = 60 \Rightarrow 100 - 2Q = 60 \Rightarrow Q_0 = 20$
مازاد مصرف‌کننده $= \int_0^{20} ((100 - 2Q) - 60)dQ = \int_0^{20} (40 - 2Q)dQ = [40Q - Q^2]_0^{20} = 800 - 400 = 400$

فصل ۸

انتگرال‌های چندگانه

۱.۸ حجم زیر سطح

$$\iint_R f(x, y) dA = \text{حجم بین سطح } z = f(x, y) \text{ و ناحیه } R$$



شکل ۸-۱: حجم زیر سهمی وار

تمرین

حجم زیر تابع $f(x, y) = x + y$ روی ناحیه $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ را محاسبه کنید. حل:

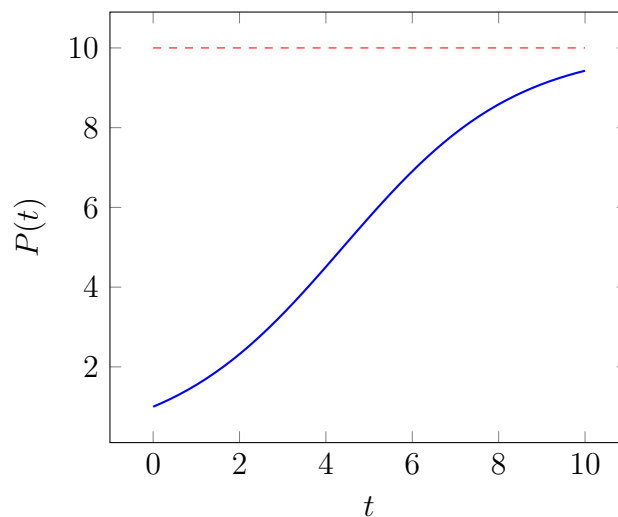
$$V = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (x+y) dy dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^1 dx = \int_0^1 (x+0.5) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 0.5x \right]_0^1 = 0.5 + 0.5 = 1$$

فصل ۹

معادلات دیفرانسیل در مدیریت

۱.۹ رشد نمایی و لجستیک

مدل رشد بازار: $\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{K})$. جواب به صورت تابع سیگموئید است.



شکل ۹-۱: منحنی لجستیک (ظرفیت محدود)

تمرین

معادله $\frac{dy}{dt} = 0.1y(10 - y)$ با $y(0) = 1$ را حل کنید و $y(5)$ را بیابید. حل: جواب: $y(t) = \frac{10}{1+9e^{-t}}$ ، $y(5) = \frac{10}{1+9e^{-5}} \approx \frac{10}{1+0.0606} = 9.43$

فصل ۱۰

اقتصاد مقاومتی و ریاضیات کاربردی (فصل ویژه)

۱.۱۰ بهینه‌سازی منابع با رویکرد جهادی

در شرایط تحریم، هدف ما حداکثر کردن تولید با حداقل وابستگی به خارج است. به عنوان مثال، تابع تولید کاب-داگلاس با کشش جانشینی پایین:

$$Q = A(\alpha K^\rho + \beta L^\rho)^{1/\rho}$$

در اقتصاد مقاومتی، ρ منفی (کشش جانشینی کمتر از ۱) انتخاب می‌شود تا استفاده از سرمایه داخلی (L) اولویت داشته باشد.

۱.۱.۱۰ مثال عددی

فرض کنید $Q = (0.3K^{-0.5} + 0.7L^{-0.5})^{-2}$. با بودجه $rK + wL = B$ و $r = 2, w = 1, B = 100$ با استفاده از روش لاگرانژ و حل عددی، تخصیص بهینه $K \approx 20, L \approx 60$ به دست می‌آید (نیروی کار بیشتر به دلیل قیمت کمتر و ضریب بالاتر).

۲.۱۰ مدیریت جهادی و تابع هزینه

هزینه کل: $C(q) = aq^2 + bq + c$. هزینه متوسط $AC(q) = aq + b + \frac{c}{q}$. با مشتق‌گیری، نقطه کمینه هزینه متوسط در $q = \sqrt{c/a}$ این فرمول به مدیر کمک می‌کند تا اندازه انباشت بهینه تولید را تعیین کند.

فصل ۱۱

پیوست الف: جزوه انتگرال خور یادآوری روش‌های انتگرال‌گیری برای مدیران فراموشکار

۱.۱۱ انتگرال‌های فوری

$\int f(x)dx$	$f(x)$
$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$(n \neq -1) x^n$
$\ln x + C$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{a}e^{ax} + C$	e^{ax}
$-\frac{1}{a}\cos ax + C$	$\sin ax$
$\frac{1}{a}\sin ax + C$	$\cos ax$
$\frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + C$	$\frac{1}{a^2+x^2}$
$\arcsin \frac{x}{a} + C$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

۲.۱۱ روش تغییر متغیر

برای $du = g'(x)dx$ ، $u = g(x)$ ، $\int f(g(x))g'(x)dx$

۳.۱۱ انتگرال‌گیری جزء به جزء

$$\int u dv = uv - \int v du$$

۴.۱۱ انتگرال توابع گویا (کسرهای جزئی)

برای $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ با درجه $P < Q$ ، ابتدا Q را به عوامل خطی و درجه دوم تجزیه می‌کنیم.

تمرین‌های حل شده انتگرال خور

$$1. \int (5x^4 - 3x^2 + 2x - 7)dx = x^5 - x^3 + x^2 - 7x + C$$

$$2. \int \frac{2x}{x^2+1}dx : \text{با } u = x^2 + 1, du = 2xdx \Rightarrow \ln(x^2 + 1) + C$$

$$3. \int xe^{2x}dx : \text{جزء به جزء, } dv = e^{2x}dx, u = x, du = dx \Rightarrow \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

$$4. \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3} : \text{با } u = \sin x, du = \cos x dx \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx$$

$$5. \int \frac{1}{x^2-4}dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

فصل ۱۲

نمونه سوالات امتحانی جامع با پاسخ تشریحی

۱. شرکت «همت گناباد» تابع سود $\pi(x, y) = 400x + 600y - 5x^2 - 4y^2 - 2xy$ دارد. ماکزیمم سود بدون قید را بیابید. حل: $\pi_x = 400 - 10x - 2y = 0$, $\pi_y = 600 - 8y - 2x = 0$. حل دستگاه: از اول $y = 200 - 5x$ ، در دوم: $600 - 8(200 - 5x) - 2x = 600 - 1600 + 40x - 2x = 0 \Rightarrow 38x = 1000 \Rightarrow x \approx 26.316$
 $y = 200 - 131.58 = 68.42$. ماتریس هسین: $\begin{pmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$ با دترمینان $80 - 4 = 76 > 0$ و $f_{xx} < 0$ ماکزیمم.

۲. ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید. دترمینان و در صورت امکان معکوس آن را بیابید. حل: $\det A = 1(1 \cdot 0 - 4 \cdot 6) - 2(0 \cdot 0 - 4 \cdot 5) + 3(0 \cdot 6 - 1 \cdot 5) = 1(0 - 24) - 2(0 - 20) + 3(0 - 5) = -24 + 40 - 15 = 1$
 از آنجا که $\det A \neq 0$ ، معکوس وجود دارد. با استفاده از روش هم‌سازها یا نرم‌افزار، A^{-1} محاسبه می‌شود.

۳. انتگرال $\int_0^2 (x^2 + 2x)e^{-x} dx$ را محاسبه کنید. حل: ابتدا $\int (x^2 + 2x)e^{-x} dx$ را با جز به جز حل می‌کنیم.
 $\int 2xe^{-x} dx = -2xe^{-x} - \int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int xe^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$
 $2e^{-x} + C$ جمع: $(-x^2 - 4x - 4)e^{-x} + C$. در بازه $[0, 2]$: $-16e^{-2} + 4 = -4$
 $4 - 16e^{-2}$

۴. معادله دیفرانسیل $\frac{dP}{dt} = 0.05P(1 - \frac{P}{200})$ را با $P(0) = 20$ حل کنید و جمعیت را در $t = 10$ تقریب بزنید. حل: جواب: $P(t) = \frac{200}{1 + 9e^{-0.05t}}$, $P(10) = \frac{200}{1 + 9e^{-0.5}} \approx \frac{200}{1 + 5.459} = 30.96$

۵. در اقتصاد مقاومتی، فرض کنید تابع تولید یک کارخانه $Q = 10K^{0.3}L^{0.7}$ ، قیمت سرمایه $r = 5$ ، قیمت نیروی کار $w = 2$ و بودجه $B = 100$ باشد. تخصیص بهینه را با روش لاگرانژ پیدا کنید. حل: $\mathcal{L} = 10K^{0.3}L^{0.7} + \lambda(100 - 5K - 2L)$. شرط: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 3K^{-0.7}L^{0.7} = 5\lambda$ ، $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 7K^{0.3}L^{-0.3} = 2\lambda$. تقسیم: $\frac{3}{7} \frac{L}{K} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{L}{K} = \frac{35}{6} \approx 5.833$. از قید: $5K + 2(5.833K) = 100 \Rightarrow 16.666K = 100 \Rightarrow K = 6$
 $L = 35$ ، $100 \Rightarrow 5K + 11.666K = 16.666K = 100 \Rightarrow K = 6$
 $10(6^{0.3})(35^{0.7}) \approx$ تولید بهینه: $10(1.7)(11.2) = 190.4$

۶. (سوال اضافی) با استفاده از روش کرامر، دستگاه $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$ را حل کنید. حل: $\det A = 2(-2) - 3(1) = -4 - 3 = -7$
 $\det A_y = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -16 + 9 = -7$ ، $x = \frac{-7}{-7} = 1$ ، $\det A_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 8 = -14$ ، $y = \frac{-14}{-7} = 2$

۷. (سوال اضافی) ماتریس $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید. مقادیر ویژه را بیابید. حل: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1, -2$

۸. (سوال اضافی) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ را محاسبه کنید. **حل:** $\int_1^2 x^{-2} dx = [-x^{-1}]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

۹. (سوال اضافی) معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = 2xy$ را با شرط $y(0) = 1$ حل کنید. **حل:** $\frac{dy}{y} = 2x dx \Rightarrow \ln y = x^2 + C$ پس $y = e^{x^2+C} = Ce^{x^2}$. با شرط اولیه $C = 1$ ، پس $y = e^{x^2}$.

۱۰. (سوال اضافی) نقطه بحرانی $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$ را بیابید. **حل:** $f_x = 2x + y - 3 = 0$, $f_y = x + 2y - 3 = 0$. حل: از اول $y = 3 - 2x$ در دوم: $x + 6 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow -3x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$, $y = 1$. نقطه $(1, 1)$.

۱۱. (سوال اضافی) $\iint_R (x + y) dA$ که R مربع $[0, 1] \times [0, 1]$ است را محاسبه کنید. **حل:** $\int_0^1 \int_0^1 (x + y) dy dx = \int_0^1 (x + 0.5) dx = 0.5 + 0.5 = 1$.

۱۲. (سوال اضافی) دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ را بیابید. **حل:** ماتریس مثلثی، دترمینان حاصل ضرب قطر اصلی $1 \times 1 \times 2 = 2$.

منابع و مراجع

کتاب‌نامه

- [۱] K. Wainwright, & C. A. Chiang, (۲۰۰۵). *ریاضیات برای اقتصاددانان* (ترجمه فارسی). انتشارات دانشگاه تهران.
- [۲] P. Hammond, & K. Sydsæter, (۲۰۱۲). *ریاضیات برای تحلیل اقتصادی*. نشر نی.
- [۳] L. Blume, & P. C. Simon, (۱۹۹۴). *Economists for Mathematics*. Norton.
- [۴] کریمی، ع. (۱۳۹۸). «کاربرد روش لاگرانژ در بهینه‌سازی منابع با رویکرد اقتصاد مقاومتی»، فصلنامه مدیریت جهادی و اقتصاد اسلامی، شماره ۱۲، صص ۴۵-۶۷.
- [۵] شیرازی، ر. (۱۳۹۶). *ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (با مثال‌های صنعتی)*. انتشارات مجتمع آموزش عالی گناباد.
- [۶] زرین‌کوب، ح. (۱۳۹۹). «طنز در آموزش ریاضیات عالی»، نشریه ریاضی و جامعه، دوره ۵، شماره ۲، صص ۱۱۲-۱۲۰.

پاسخ‌های تشریحی تمرین‌های فصول (گزیده)

فصل ۱، تمرین اضافی ۱: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$. فصل ۲، تمرین اضافی ۱: نقطه $(2, 0)$ مینیمم محلی. فصل
انتگرال خور: $\int x e^{2x} dx = \frac{1}{4}(2x - 1)e^{2x} + C$. سوالات امتحانی: پاسخ‌ها در متن داده شده است.

کتاب انتگرال خور

این قسمت به فایل PDF جداگانه‌ای با عنوان «کتاب انتگرال خور» اشاره دارد. لطفاً فایل Ketab_Entegral_Khor.pdf را در کنار این فایل قرار دهید. این کتاب شامل توضیحات کامل، مثال‌های متعدد و تمرین‌های حل شده برای یادگیری عمیق انتگرال است.

پیوست



انتگرال خور

(روشهای انتگرال گیری)

جلد اول - انتگرال نامعین

نویسنده:

حسین ایزن

ویرایش اول:

مهرماه ۱۳۹۱

مقدمه

سلام

در کتابی که پیش رو دارید به بحث در مورد روشهای انتگرال گیری می پردازیم اسم کتاب رو "انتگرال خور" گذاشتم چون می خواستم یه اسم متفاوت داشته باشه. این کتاب حاصل چندین سال تدریس من در دانشگاههای مختلف هست در مورد محتوای اون هم شما باید نظر بدید اما به هر حال من سعی کردم حتی الامکان کتابی روان، کم اشتباه و کامل رو براتون آماده کنم در جلد اول انتگرال خور به بحث انتگرال نامعین و تکنیکهای انتگرال گیری می پردازیم. اگر خدا قسمت کنه جلدهای بعدی انتگرال خور که به انتگرال معین، انتگرال دوگانه و ... اختصاص خواهد داشت رو براتون آماده می کنم البته به جز مبحث ریاضی در رشته اصلی خودم یعنی مهندسی مکانیک هم مطالبی آماده کردم که امیدوارم بتونم اونها رو هم به صورت کتاب در بیارم.

من همیشه سعی کردم در کلاسهایم ارتباط نزدیکی با بچه ها داشته باشم و در این کتاب هم همین روال رو دنبال کردم بنابراین در اینجا صرفا با یکسری از فرمولهای خشک ریاضی طرف نمی شید. خودم دوست داشتم کتاب رو به صورت رنگی آماده کنم اما چون ممکنه خدای ناکرده یک وقتی کسی بخواد کتاب رو پرینت بگیره و مطالعه کنه! کتاب رو به صورت تک رنگ نوشتم تا مشکل پرینت هم نداشته باشید.

در آخر اگر سوالی، پیشنهادی، تعریفی، تحسینی (یا احیانا زبونم لال انتقادی!) هم داشتید می تونید از یکی از سه روش زیر استفاده کنید:

روش اول: استفاده از پیغامگیر: ۰۹۳۷ ۲۴۳ ۱۱۷۴

مثلا اگر در صفحه ۲۵ خط ششم اشکالی دارید اشاره کنید تا در سایت براتون توضیح بیشتری بدم و در ویرایشهای بعدی انتگرال خور اصلاحات لازم رو انجام بدم.

روش دوم: مراجعه به سایت: www.integralkhor.blogfa.com

روش سوم: پست الکترونیکی: integralkhor@gmail.com

با آرزوی موفقیت

حسین ایزن - بیست هفتم مهرماه ۱۳۹۱

فهرست

- فصل اول: تعریف انتگرال و فرمولهای پایه انتگرال گیری صفحه: ۱
- فصل دوم: روش تغییر متغیر و فرمولهای تعمیم یافته صفحه: ۲۳
- فصل سوم: تغییر متغیرهای مثلثاتی صفحه: ۴۶
- فصل چهارم: انتگرال گیری از کسرهای گویا صفحه: ۶۲
- فصل پنجم: روش جزء به جزء صفحه: ۷۸
- فصل ششم: انتگرال های مثلثاتی صفحه: ۹۵

فصل اول: تعریف انتگرال و فرمولهای مقدماتی

مقدمه

حتما تا حالا این جمله رو شنیدید که بچه ها (چه دانش آموز و چه دانشجو) می‌کن: "ما مشتق رو خوب بلدیم اما از انتگرال سر در نمی‌آوریم!" در جواب این افراد باید بگم که: اگر شما مشتق رو خوب یاد بگیرید و یک سری ریزه کاریها رو هم بلد باشید میتونید خیلی راحت عملیات انتگرال گیری رو انجام بدید ما در کتاب **انتگرال فور** که در چندین جلد آماده میشه (انتگرال نامعین، انتگرال معین، انتگرال دوگانه و ...) سعی می‌کنیم این ریزه کاریها رو با هم مرور کنیم، فب سرتون رو درد نیارم بریم سراغ درسمون.

انتگرال

به صورت خیلی ساده انتگرال گیری عکس عمل مشتق گیری است اما بطور؟ به مثال زیر دقت کنید:

$$y = x^2 \quad \xrightarrow{\text{مشتق}} \quad y' = 2x$$

حالا که از شما بپرسن اون چه تابعی هست که مشتقش شده $2x$ چی میکنن؟ حتما سریع میکنن: فب معلومه x^2 شایدم یکی بگه $x^2 + 5$ یا $x^2 + 1$ و همه این جوابها هم درسته. واقعیت اینه که شما نمی‌تونید بگید عدد ثابتی که با x^2 جمع شده چند بوده چون در مشتق گیری عدد ثابت حذف میشه (صفر میشه) بنابراین به صورت کلی می‌تونیم بگیم جواب ما $x^2 + c$ هست که c به عدد ثابت. به بیان انتگرالی داریم:

$$\int 2x \, dx = x^2 + c$$

فب حالا بگید اون چه تابعیه که مشتقش شده $3x^2$ ؟

آقا اجازه: معلومه $x^3 + c$ یا به بیان انتگرالی:

$$\int 3x^2 \, dx = x^3 + c$$

آفرین مشفصه که درسو یاد گرفتین! دیگه وقتشه بریم سراغ اصل مطلب یعنی تعریف انتگرال.

تعریف انتگرال

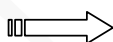
شکل کلی یک انتگرال به صورت زیر هست:

$$\int_a^b f(x)dx$$

که a را عدد پایین و b را عدد بالای انتگرال می‌گوییم $f(x)$ هم تابع جلوی انتگرال هست.

تذکره یک: اگر محدود انتگرال یعنی a, b داده شده باشند انتگرال رو معین و در غیر اینصورت انتگرال رو نامعین می‌گوییم.

$$\int_a^b f(x)dx$$



انتگرال معین

$$\int f(x)dx$$



انتگرال نامعین

ما در جلد اول انتگرال فور فقط انتگرال نامعین رو بررسی می‌کنیم.

تذکره دو: dx یعنی انتگرالگیری نسبت به x انجام می‌شود (متغیر ما x است) بنابراین هر عبارتی که x ندارد عدد ثابت فرض می‌شود.

مالا که با تعریف انتگرال آشنا شدید به نکته ای رو عنوان می‌کنم که همیشه باید تو ذهنتون باشه:

اگر از جواب انتگرال نامعین مشتق بگیریم باید به تابع جلوی انتگرال برسیم

به بیان انتگرالی داریم :

$$\int f(x)dx = g(x) \rightarrow g'(x) = f(x)$$

به عنوان مثال:

$$\int \cos x \, dx = \sin x \Rightarrow (\sin x)' = \cos x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

تذکر مهم: یادتون باشه جواب انتگرال رو از هر روشی بدست بیارید (کمک از بغل دستی، نوشتن داخل ماشین حساب، هندز فیری...) باید در قاعده بالا صدق کنه!!

مثال: فرض کنید در جلسه امتحان انتگرالی به صورت

$$\int \frac{2x^2 + 1}{x} dx$$

داره شده و بغل دستی شما جواب رو به صورت $g(x) = x^2 - \ln(x)$ بدست آورده! آیا به نظرتون جواب درسته؟

حل: فب کافیه از جواب مشتق بگیریم:

$$g(x) = x^2 - \ln(x) \Rightarrow g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

همونطور که می بینید جواب درست نیست! البته فقط یه منفی اشتباه داره و جواب درست به صورت $g(x) = x^2 + \ln(x)$ است.

نتیجه گیری افلاقی: سعی کنید به معلومات خودتون تکیه کنید.

دو قانون مهم در انتگرال گیری

قانون اول

اگر یادتون باشه برای مشتق گیری از جمع و تفریق چند تابع کافیه از تک تک توابع جداگانه مشتق بگیریم. در اینجا برای انتگرال گیری هم به همین صورت عمل می کنیم یعنی اگر در جلوی انتگرال جمع یا تفریق چند تابع رو داشته باشیم برای تک تک توابع جداگانه انتگرال می نویسیم به بیان ریاضی داریم:

$$\int (f(x) \pm g(x) \pm \dots) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \pm \dots$$

به عنوان مثال:

$$\int (x^2 + 3x - 7) dx = \int x^2 dx + \int 3x dx - \int 7 dx$$

تذکره یک: وقتی برای هر تابع جداگانه انتگرال رو نوشتید dx فراموش نشه!

تذکره دو: وقتی یکم مرغه ای شدید می تونید یکدفعه انتگرال گیری رو انجام بدید و دیگه نیازی به تفکیک انتگرال نیست.

و اما قانون دوم

اگر یک عدد ثابت (مانند k) در تابع جلوی انتگرال ضرب شده باشه می توان آن را از انتگرال بیرون آورد.

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

اگه یادتون باشه همین قانون رو در مورد مشتق گیری هم داشتیم.

چند مثال:

$$(a) \int 5x \, dx = 5 \int x \, dx \qquad (b) \int \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{1}{3} \int x^2 \, dx$$

$$(c) \int tx^2 \, dx = t \int x^2 \, dx \qquad (d) \int tx^2 \, dt = x^2 \int t \, dt$$

تفاوت انتگرال (c) و (d) رو متوجه شدید یا نه؟

توجه کنید در انتگرال (c) متغیر x هست (چون dx داریم) بنابراین t عدد ثابت محسوب می شه و از انتگرال بیرون میاد اما در انتگرال (d) متغیر t هست (چون dt داریم) بنابراین x^2 عدد ثابت محسوب می شه و از انتگرال بیرون میاد.

و اما قانون سوم و چهارم!

متأسفانه بعضی از بچه ها فکر می کنند برای انتگرال گیری از ضرب و تقسیم توابع هم (مثل مشتق) فرمول داریم اما متأسفانه چنین فرمولی وجود ندارد بنابراین روابط زیر اشتباه هستند:

$$\int f(x) \cdot g(x) \, dx \neq \left(\int f(x) \, dx \right) \left(\int g(x) \, dx \right)$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} \, dx \neq \frac{\int f(x) \, dx}{\int g(x) \, dx}$$

بنابراین قانون سوم و چهارمی وجود ندارد!! ☹

مثال: انتگرال های داده شده را برای انتگرال گیری آماده کنید!

$$a) \int (5s^2 - 3 \cos x) dx$$

$$b) \int \left(\frac{3x^4}{5} + \frac{2}{x} + 7 \right) dx$$

$$c) \int e^{x+y} dx$$

$$d) \int \frac{5x^2 + 3}{x} dx$$

حل:

$$a) \int (5s^2 - 3 \cos x) dx = \int 5s^2 dx - \int 3 \cos x dx = 5s^2 \int dx - 3 \int \cos x dx$$

$$b) \int \left(\frac{3x^4}{5} + \frac{2}{x} + 7 \right) dx = \int \frac{3x^4}{5} dx + \int \frac{2}{x} dx + \int 7 dx = \frac{3}{5} \int x^4 dx + 2 \int \frac{1}{x} dx + 7 \int dx$$

$$c) \int e^{x+y} dx = \int e^y e^x dx = e^y \int e^x dx$$

$$d) \int \frac{5x^2 + 3}{x} dx = \int \frac{5x^2}{x} dx + \int \frac{3}{x} dx = 5 \int x dx + 3 \int \frac{1}{x} dx$$

تذکره: می‌دونم همتون بلدید ولی برای یادآوری:

$$\frac{3x^4}{5} = \frac{3}{5} x^4, \quad \frac{2}{x} = 2 \frac{1}{x}, \quad \frac{x+3}{7} = \frac{1}{7} (x+3)$$

به همین صورت میتونیم بنویسیم:

$$\frac{x + \cos x}{5} = \frac{1}{5} (x + \cos x) \quad \text{یا} \quad \frac{x + \cos x}{5} = \frac{x}{5} + \frac{\cos x}{5} = \frac{1}{5} x + \frac{1}{5} \cos x$$

ممکنه این نکاتی رو که گفتم خیلی پیش پا افتاده به نظرتون بیاد اما تجربه نشون داده که عرم توجه به همین نکات ساده

منشاء اکثر اشتباهات در انتگرال گیری بوده و فوایدش بود!!

فرمولهای پایه انتگرال گیری

در این قسمت ما در ابتدا یکسری از انتگرال های ساده رو حفظ می کنیم و در ادامه سعی می کنیم انتگرال های پیچیده تر رو با استفاده از تکنیک هایی مثل تغییر متغیر یا جزء به جزء به انتگرال های ساده تر تبدیل کنیم. این انتگرال های ساده رو در اینجا فرمولهای پایه انتگرال گیری می نامیم. و اما اولین فرمول:

$$\int dx = x + c$$

دقت کنید اگر از $x + c$ (یعنی جواب انتگرال) مشتق بگیریم به تابع جلوی انتگرال می رسیم.

تذکره: واضحه فرمول بالا رو می توئیم در مورد هر متغیر دیگری هم بنویسیم به عنوان مثال

$$\int dy = y + c, \quad \int dt = t + c, \quad \int d(\odot) = \odot + c$$

آقا اجازه: می توئیم بگیم $\int$ و d همریکرو فنی می کنن و فقط x می مونه؟

استاد: چراغ خاموش آره میشه گفت! ولی سعی کن به این قوانین آبلوشتی زیاده تکیه نکنی!!!

قبل از اینکه بریم سراغ فرمول دوم دو تا رابطه رو براتون یادآوری می کنم.

$$(a) \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \quad (b) \quad \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

یادآوری ۱

به عنوان مثال:

$$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \quad \sqrt{x} = \sqrt[2]{x^1} = x^{\frac{1}{2}} \quad \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}}$$

و اما رابطه دوم

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

رابطه بالا مهمترین و پرکاربردترین رابطه مبحث انتگرال گیری می باشد بنابراین باید کاملاً بر اون مسلط باشید.

تذکره یک: در فرمول بالا n (یعنی توان x) می تواند هر عددی (کسری، صحیح، ...) به جز -1 باشد

تذکره دو: برای استفاده از فرمول بالا متماً باید x^n در صورت کسر باشد. بنابراین اگر در مسئله داده شده x در مخرج کسر یا در زیر رادیکال باشد باید آن را با استفاده از روابط بالا (یادآوری!) به صورت توان دار در صورت کسر نوشت.

حالا چند تا مثال آسون با هم حل می کنیم.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال های زیر:

$$(a) \int x^2 dx \quad (b) \int x^{\frac{3}{5}} dx \quad (c) \int \sqrt{x} dx \quad (d) \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$(e) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (f) \int \frac{3x}{7} dx \quad (g) \int (x\sqrt{x} + 2) dx \quad (h) \int \frac{4x^5 + 7}{3x^2} dx$$

حل:

$$(a) \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3} + c \quad (b) \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8} \sqrt[5]{x^8} + c$$

تذکره: معمولاً بعد از انتگرال گیری و بدست آوردن جواب آخر بهتره که جواب رو به جای توان کسری به صورت رادیکالی

بنویسیم.

$$(c) \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + c$$

دقت کنید $x^{\frac{3}{2}}$ ، رو می‌تونیم به دو صورت بنویسیم یکی به صورت $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{x^3} = \sqrt{x^3}$ یا اینکه بنویسیم؛

$x^{\frac{3}{2}} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{x}$ ، واقعاً توان صیغ x ، و بیرون، اذیکال نوشتیم

$$(d) \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = \frac{-1}{x} + c$$

$$(e) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \int x^{\frac{-1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + c$$

$$(f) \int \frac{3x}{7} dx = \frac{3}{7} \int x dx = \frac{3}{7} \left(\frac{x^2}{2} \right) = \frac{3x^2}{14} = \frac{3}{14} x^2 + c$$

$$(g) \int (x\sqrt{x} + 2) dx = \int x\sqrt{x} dx + \int 2 dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \int dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2x = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + 2x + c$$

$$(h) \int \frac{4x^5 + 7}{3x^2} dx = \int \left(\frac{4x^5}{3x^2} + \frac{7}{3x^2} \right) dx \\ = \int \frac{4}{3} x^3 dx + \int \frac{7}{3} \frac{1}{x^2} dx = \frac{4}{3} \int x^3 dx + \frac{7}{3} \int x^{-2} dx = \frac{4}{3} \left(\frac{x^4}{4} \right) \\ + \frac{7}{3} \left(\frac{x^{-1}}{-1} \right) = \frac{x^4}{3} - \frac{7}{3x} + c$$

خلق مهم: برای مناسبه انتگرالهای کسری که مخرج کسر تک جمله ای باشد معمولا بهتر است کسر را تفکیک کنیم

$$\frac{a + b + c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

سه حالت خاص مهم از رابطه دوم (این سه تا انتگرال رو حفظ کنید واسه آیندتون فوبه!)

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} \quad \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

رابطه سوم، انتگرال سینوس و کسینوس

$$(a) \int \cos x \, dx = \sin x + c \quad (b) \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

حالا از جواب انتگرال های بالا مشتق می گیریم ببینیم به تابع جلوی انتگرال می رسیم یا نه!

$y = \sin x$	$\xrightarrow{\text{مشتق}}$	$y' = \cos x$	
$y = -\cos x$	$\xrightarrow{\text{مشتق}}$	$y' = -(-\sin x) = \sin x$	

می بینید که همه چی آرومه!

قبل از اینکه از این قسمت مثال حل کنیم چند تا رابطه مثلثاتی رو براتون یادآوری می کنم.

یادآوری ۲

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \quad \tan x = \frac{1}{\cot x}$$

$$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad 1 + \cot^2(x) = \csc^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$\cos 2x = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x \quad (\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$$

خب حالا چند انتگرال فوشکل با هم حل می کنیم .

تذکره: دقت کنید ایده های ساده ای که در حل این انتگرال ها بکار رفته بعدا بدردتون می خوره.

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a) \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$(b) \int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$$

$$(c) \int \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$(d) \int (\tan x + \cot x) \sin 2x dx$$

$$(e) \int \sin x \cdot \cos t dt$$

$$(f) \int \frac{\cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$$

حل:

$$\begin{aligned}
 (a) \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} dx &= \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x + \sin x)} dx \\
 &= \int (\cos x - \sin x) dx = \int \cos x dx - \int \sin x dx = \sin x + \cos x + c
 \end{aligned}$$

$$(b) \int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} dx = \int 2 \sin x dx = -2 \cos x + c$$

$$\begin{aligned}
 (c) \int \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx &= \int \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} dx = \int (\sin x + \cos x) dx \\
 &= -\cos x + \sin x = \sin x - \cos x + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (d) \int (\tan x + \cot x) \sin 2x dx &= \int \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} dx \\
 &= \int 2 dx = 2x + c
 \end{aligned}$$

$$(e) \int \sin x \cdot \cos t dt = \sin x \int \cos t dt = \sin x \cdot \sin t + c$$

$$(f) \int \frac{\cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{\frac{1 + \cos 2x}{2}}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2} + c$$

دقت کنید در حل انتگرال بالا صورت کسر رو به شکل زیر نوشتم:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

رابطه چهارم

$$(a) \int (1 + \tan^2 x) dx = \int \sec^2 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$(b) \int (1 + \cot^2 x) dx = \int \csc^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$(c) \int \sec x \cdot \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \sec x + c$$

$$(d) \int \csc x \cdot \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\csc x + c$$

آله یادتون باشه داشتیم!

$$y = \tan x \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \cot x \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = -(1 + \cot^2 x) = -\csc^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \cdot \tan x$$

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x} \frac{\cos x}{\sin x} = \csc x \cdot \cot x$$

دقت کنید برای مناسبه انتگرال سکانت آن را به صورت معکوس کسینوس نوشته سپس از قانون مشتق کسر استفاده می‌کنیم (به همین صورت برای کسکانت)

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال های زیر:

$$(a) \int \tan^2 x \, dx \quad (b) \int \frac{3}{1 - \cos^2 x} \, dx \quad (c) \int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \, dx$$

حل:

$$(a) \int \tan^2 x \, dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) dx = \int (1 + \tan^2 x) dx - \int dx = \tan x - x + c$$

تذکره: دقت کنید برای حل انتگرال بالا ابتدا عدد یک رو به انتگرال اضافه کردیم تا به شکل رابطه (a) در یاد سپس دوباره یک رو از انتگرال کم کرده و انتگرال ها رو تفکیک کردیم.

$$(b) \int \frac{3}{1 - \cos^2 x} \, dx = \int \frac{3}{\sin^2 x} \, dx = 3 \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -3 \cot x + c$$

$$\begin{aligned} (c) \int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \, dx &= \int \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \, dx + \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \, dx \\ &= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx + \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \, dx = \sec x - \csc x + c \end{aligned}$$

تابع نمایی و لگاریتمی

قبل از شروع بحث جدید به یادآوری توابع نمایی و لگاریتمی می پردازیم.

یادآوری ۳

تابع نمایی: منظور از تابع نمایی تابعی به صورت a^x است که a را پایه و x را نما (توان) می گوئیم اگر پایه تابع نمایی برابر عدد نپر ($e=2.718\dots$) باشد به آن تابع نمایی طبیعی می گوئیم (به صورت خلاصه تابع نمایی) e^x از قوانین ضرب و تقسیم اعداد تواندار پیروی می کند یعنی داریم:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

یادآوری ۴

لگاریتم: لگاریتم تابع را به صورت زیر می نویسیم:

$$\log_a y = x$$

و می خوانیم لگاریتم y در مبنای (پایه) a می شود x . رابطه بین تابع لگاریتمی و نمایی به صورت زیر است:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

اگر مبنای لگاریتم عدد نپر باشد به جای $\log_e y$ می نویسیم $\ln y$ و به آن لگاریتم طبیعی می گوئیم قوانین پایه لگاریتم طبیعی به صورت زیر بیان می شود:

$$\ln x + \ln y = \ln(xy) \quad \ln x - \ln y = \ln\left(\frac{x}{y}\right) \quad \ln x^n = n \ln x$$

$$\ln e = 1 \quad \ln 1 = 0$$

مثال چندتا مثال مهم می زنم خوب دقت کنید

$$(a) \quad \ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln(x^2 - 1)$$

$$(b) \quad \ln(x-1) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$(c) \quad -\ln(x+1) = \ln(x+1)^{-1} = \ln\frac{1}{x+1}$$

$$(d) \quad \ln\sqrt{x+3} = \ln(x+3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln(x+3)$$

$$(e) \quad \ln(x^2 - x) = \ln x(x-1) = \ln x + \ln(x-1)$$

$$(f) \quad -\ln \cos x = \ln(\cos x)^{-1} = \ln \frac{1}{\cos x} = \ln \sec x$$

$$(g) \quad \ln \frac{1}{\sqrt{x}} = -\ln\sqrt{x} = -\frac{1}{2} \ln x$$

و اما انتگرال توابع نمایی و لگاریتم

مثلا یادتون هست که مشتق e^x میشه خودش بنابراین انتگرال e^x هم خودش می شود. یعنی:

$$\int e^x dx = e^x + c$$

مثال:

$$\int e^{x+2} dx = \int e^x \cdot e^2 dx = e^2 \int e^x dx = e^2(e^x + c) = e^{x+2} + c$$

همچنین مشتق $\ln x$ همیشه $\frac{1}{x}$ بنابر این:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

آقا اجازه: این علامت قدر مطلق چیه؟

استاره علامت قدر مطلق واسه اینکه تابع جلوی لگاریتم باید مثبت باشه، البته خودم زمان دانشجویی هیپوخت علامت قدر مطلق رو جلوی لگاریتم نمی زاشتم چون ارزش خوشم نمیومر!! البته شما بهتره از این کارای بد انبام نری!

مثال: انتگرال های زیر را حل کنید

$$(a) \int \frac{1}{2x} dx \quad (b) \int \frac{x+3}{x} dx \quad (c) \int \frac{x-2}{x^2} dx$$

حل:

$$(a) \int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \ln|x| + c = \ln\sqrt{x} + c$$

$$(b) \int \frac{x+3}{x} dx = \int \left(\frac{x}{x} + \frac{3}{x}\right) dx = \int \left(1 + \frac{3}{x}\right) dx = \int dx + 3 \int \frac{1}{x} dx \\ = x + 3\ln|x| + c = x + \ln|x|^3 + c$$

متوجه شدید که از چه قلقی استفاده کردیم یا به این زودی یادتون رفت؟؟!!!

$$(c) \int \frac{x-2}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx = \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{1}{x^2} dx = \ln|x| - 2 \left(\frac{-1}{x}\right) + c \\ = \ln|x| + \frac{2}{x} + c$$

انتگرال $\int \frac{1}{x^2} dx$ خاطرتون هست؟ مکه نکستم حفظش کنید واسه آیندتون خوبه !!

حالا می‌خواهیم توابع نمایی و لگاریتمی رو با هم قاطی کنیم ببینیم چی از توش در میاریم؟ اما قبلش طبق روال دو تا رابطه رو یادآوری می‌کنیم.

یادآوری ۵

$$\ln e^{f(x)} = f(x) \quad \text{مثلا} \rightarrow \ln e^{\sin x} = \sin x$$

$$e^{\ln f(x)} = f(x) \quad \text{مثلا} \rightarrow e^{\ln x^2} = x^2$$

اگه دقت کنید می‌بینید که e , $\ln$ همدیگر رو شنی می‌کنند و فقط $f(x)$ می‌مونه!

آقا اجازه: آفه چه کاریه الکی از خودمون رابطه در بیاریم؟؟

استاد: اتفاقا این دو تا رابطه در خیلی از دروس مهندسی (به خصوص معادلات دیفرانسیل) به دردتون می‌خوره اما بطور؟
یه مثال براتون می‌زنم.

فرض کنید در خلال حل یک مسئله به رابطه $e^y = .5$ رسیدیم و مسئله از ما y رو می‌خواد حالا بطور از شر e خلاص بشیم؟

جواب: کافیه از طرفین رابطه ای که بدست آوردیم $\ln$ بگیریم و سپس از رابطه $\ln e^{f(x)} = f(x)$ استفاده کنیم.

$$e^y = .5 \Rightarrow \ln e^y = \ln .5 \Rightarrow y = \ln .5 = -.693 \Rightarrow y = -.693$$

بنابراین:

هرگاه با رابطه ای به صورت $e^{f(x)} = k$ مواجه شدیم برای بدست آوردن $f(x)$ از طرفین رابطه $\ln$ می‌گیریم و از رابطه $\ln e^{f(x)} = f(x)$ استفاده می‌کنیم

حالا فرض کنید در فلال حل یک مسئله به رابطه $\ln x = 2.2$ رسیدیم و مسئله از ما x رو می خواد حالا بطور از شر $\ln$ فلاص بشیم ؟

جواب: کافیه طرفین رابطه ای رو که بدست آوردیم توان e قرار دهیم و سپس از رابطه $e^{\ln f(x)} = f(x)$ استفاده کنیم.

$$\ln x = 2.2 \Rightarrow e^{\ln x} = e^{2.2} \Rightarrow x = e^{2.2} = 9 \Rightarrow x = 9$$

بنابراین:

هرگاه با رابطه ای به صورت $\ln f(x) = k$ مواجه شدیم برای بدست آوردن $f(x)$ طرفین رابطه را توان e قرار می دهیم و از رابطه $e^{\ln f(x)} = f(x)$ استفاده می کنیم

حالا که این دو تا رابطه رو یاد گرفتید چند تا انتگرال قشنگ با هم حل می کنیم

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a) \int e^{2\ln x} dx \quad (b) \int e^{-\ln x} dx \quad (c) \int \ln e^{\cos x} dx$$

حل:

$$(a) \int e^{2\ln x} dx = \int e^{\ln x^2} dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$(b) \int e^{-\ln x} dx = \int e^{\ln \frac{1}{x}} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$(c) \int \ln e^{\cos x} dx = \int \cos x dx = \sin x + c$$

توابع معکوس مثلثاتی

در آخرین بخش از این فصل به بررسی انتگرال توابع معکوس مثلثاتی (آرک سینوس و آرک تانژانت) می پردازیم.

همونطور که یادتون هست (که مطمئنم یادتون نیست!!!) از مبدا مشتق داشتیم:

$$y = \sin^{-1} x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \tan^{-1} x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{1+x^2}$$

بنابراین داریم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$$

و در حالت کلی داریم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$$

توجه: در روابط بالا a عددی ثابت است.

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a) \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} \quad (b) \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} \quad (c) \int \frac{dx}{4+x^2} \quad (d) \int \frac{dx}{1+9x^2}$$

حل:

$$(a) \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

$$\begin{aligned} (b) \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} &= \int \frac{dx}{2\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sin^{-1} 2x + c \end{aligned}$$

$$(c) \int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx}{2^2+x^2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} + c$$

$$\begin{aligned} (d) \int \frac{dx}{1+9x^2} &= \int \frac{dx}{9\left(\frac{1}{9}+x^2\right)} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\frac{1}{9}+x^2} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow a = \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\frac{1}{9}+x^2} = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{\frac{1}{3}} \tan^{-1} \frac{x}{\frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{3} \tan^{-1} 3x + c \end{aligned}$$

مسائل فصل اول

۱- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

$$(1) \int (2 + \tan^2 x) dx$$

$$(2) \int x dt$$

$$(3) \int d(x^2 + 3x)$$

$$(4) \int \ln\left(\frac{1}{e^x}\right) dx$$

$$(5) \int e^{2\ln \sec x} dx$$

$$(6) \int \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x}} dx$$

$$(7) \int \frac{(x+1)^3}{2x} dx$$

$$(8) \int \frac{dx}{4x^2 + 25}$$

$$(9) \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$$

$$(10) \int e^2 dx$$

۲- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل مغ گرمی)

$$(1) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

$$(2) \int (\tan^2 x \cdot \sin x) dx$$

$$(3) \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$$

$$(4) \int \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} dx$$

$$(5) \int e^{-2\ln x} dx$$

$$(6) \int \left(\int x^2 t^3 dt \right) dx$$

$$(7) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$$

$$(8) \int (2 + \tan^2 x) dx$$

فصل دوم : روش تغییر متغیر (جانشینی)

تا اینجای کار برخی از انتگرال های ساده رو با استفاده از روابط پایه حساب کردیم اما خیلی از انتگرال هایی که ما باهاشون روبرو می شیم با استفاده از این فرمولها قابل حل نیستند بنابراین باید با استفاده از روشهای خاصی انتگرال های داده شده را ساده کنیم یکی از این روشها ، روش تغییر متغیر نام دارد که در ادامه به توضیح آن می پردازیم

انتگرال زیر رو در نظر بگیرید، (مشفصه که این انتگرال رو نمی توانیم از روابط پایه حساب کنیم)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

ابتدا عبارت زیر را دیکال رو برابر به متغیر جدید مثل u قرار میدیم و سپس از طرفین رابطه دیفرانسیل می گیریم:

$$u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x dx$$

آقا اجازه: دیفرانسیل می گیریم یعنی پی؟

استاد: خیلی ساده بخوایم بگیم اول از عبارت مشتق بگیر بعد حاصل مشتق رو در dx ضرب کن.

حالا عبارت رو به صورت $dx = \dots$ مرتب می کنیم

$$du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

سپس در انتگرال اولیه به جای $x^2 - 1$ ، u و به جای dx عبارت $\frac{du}{2x}$ رو قرار میدیم.

حالا انتگرال رو ساده می کنیم تا برعسب u در بیاد (x ها خط بخورن)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \frac{du}{2x} = \int \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

در آخر انتگرال رو برعسب u حل کرده و در جواب انتگرال به جای u همان $x^2 - 1$ را قرار می دهیم.

$$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) = u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u} + c = \sqrt{x^2 - 1} + c$$

مراحل کار در روش تغییر متغیر

در اینجا به خاطر اینکه به صورت اصولی با روش تغییر متغیر آشنا بشید مراحل کار رو به صورت قدم به قدم براتون توضیح

میدم:

قدم اول

قسمتی از تابع جلوی انتگرال را برابر یک متغیر جدید مانند u قرار می دهیم مثلاً:

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx \Rightarrow u = x^2 + 1$$

قدم دوم

از تابع دیفرانسیل می گیریم و عبارت را به صورت $dx = \dots$ مرتب می کنیم مثلاً:

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

قدم سوم

با جایگزینی dx و u در انتگرال اولیه آن را بر حسب u بازنویسی می کنیم

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx = \int x\sqrt{u} \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du$$

قدم چهارم

انتگرال حاصل را بر حسب u حل کرده و در جواب نهایی به جای u همان عبارت بر حسب x را قرار می دهیم تا

جواب نهایی بر حسب x درست آید.

$$\frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3} + c$$

آقا اجازه: انتساب u دست خودمونه؟

استاد: نفیل!!! انتساب u قلق داره و به مقدار تمرین و تجربه می فواد که من اینبا به سری از خلق ها رو بهتون می کم پس خوب گوش کنید:

الف) اگر در جلوی انتگرال عبارت رادیکالی داشتیم تابع زیر رادیکال را برابر u می گیریم مثلا:

$$\int \sqrt{3x-4} dx \Rightarrow u = 3x - 4$$

ب) اگر در جلوی انتگرال پراتنر تواندار داشتیم تابع درون پراتنر (بدون توان) را برابر u می گیریم مثلا:

$$\int (5x-3)^4 dx \Rightarrow u = 5x - 3$$

ج) اگر در جلوی انتگرال عبارتی به شکل $\sin(\dots)$ یا $\cos(\dots)$ یا مشابه آن داشتیم عبارت داخل پراتنر را برابر u می گیریم مثلا:

$$\int \sin(3x+2) dx \Rightarrow u = 3x + 2$$

تذکر مهم: دقت کنید که تکنیکهای بالا در همه موارد جواب نمیده

مثال: انتگرال های زیر را با استفاده از روش تغییر متغیر حل کنید.

$$(a) \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx \quad (b) \int x\sqrt{x-5} dx \quad (c) \int \frac{x}{(x+1)^2} dx$$

$$(d) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (e) \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (f) \int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$$

$$(g) \int \frac{2x+3}{2x+1} dx \quad (h) \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx \quad (i) \int \cos^2 x \cdot \sin x dx$$

حل:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx &\Rightarrow u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x} \\
 &\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int \frac{\sin x}{\sqrt{u}} \frac{du}{-\sin x} = -\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\int u^{-\frac{1}{2}} du = -2\sqrt{u} + c \\
 &= -2\sqrt{\cos x} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \int x\sqrt{x-5} dx &\Rightarrow u = x-5 \Rightarrow du = dx \\
 &\Rightarrow \int x\sqrt{x-5} dx = \int x\sqrt{u} du \Rightarrow x \text{ باقی ماند}
 \end{aligned}$$

همون طور که می بینید x در انتگرال باقی مونده و خط نفورر بنابر این باید به فکری به هالش بکنیم چون انتگرال باید فقط بر حسب u در بیاد بنابر این به صورت زیر عمل می کنیم:

$$u = x - 5 \Rightarrow x = u + 5$$

با جایگزینی این عبارت در انتگرال بالا داریم:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int x\sqrt{u} du &= \int (u+5)\sqrt{u} du = \int (u+5)u^{\frac{1}{2}} du = \int (u^{\frac{3}{2}} + 5u^{\frac{1}{2}}) du \\
 &= \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3} u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5} (x-5)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3} (x-5)^{\frac{3}{2}} + c \\
 &= \frac{2}{5} \sqrt{(x-5)^5} + \frac{10}{3} \sqrt{(x-5)^3} + c
 \end{aligned}$$

توجه کنید در انتگرال های بعدی آله لازم باشه x رو بر حسب u بدست بیاریم همون قدم اول این کار رو انجام میدیم.

$$\begin{aligned}
 (c) \int \frac{x}{(x+1)^2} dx &\Rightarrow u = x+1 \Rightarrow du = dx, x = u-1 \\
 \Rightarrow \int \frac{u-1}{u^2} du &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du = \int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{u^2} du = \ln |u| - \left(\frac{-1}{u} \right) + c \\
 &= \ln |x+1| + \frac{1}{x+1} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (d) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &\Rightarrow u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} du \\
 \Rightarrow \int \frac{\sin u}{\sqrt{x}} 2\sqrt{x} du &= 2 \int \sin u du = -2 \cos u + c = -2 \cos \sqrt{x} + c
 \end{aligned}$$

دقت کنید در این مسئله اگر عبارت زیر رادیکال (یعنی x) رو برابر u می‌گرفتیم به همون انتگرال اولیه می‌رسیدیم.

$$\begin{aligned}
 (e) \int \frac{\ln x}{x} dx &\Rightarrow u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow dx = x du \\
 \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx &= \int \frac{u}{x} x du = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\ln x)^2}{2} + c
 \end{aligned}$$

خلق مهم؛ معمولا اگر توی انتگرال $\ln x$ داشتیم تغییر متغیر رو برابر $u = \ln x$ می‌گیریم.

$$\begin{aligned}
 (f) \int \frac{1}{x \ln x} dx &\Rightarrow u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \Rightarrow dx = x du \\
 \Rightarrow \int \frac{1}{x \ln x} dx &= \int \frac{1}{x \cdot u} x du = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln |\ln x| + c
 \end{aligned}$$

این انتگرال خیلی مهمه و زیاده سر و کلهش تو امتحانها پیدا میشه!

$$(g) \int \frac{2x+3}{2x+1} dx \Rightarrow u = 2x+1, \quad 2x+3 = u+2$$

$$\Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{2x+3}{2x+1} dx &= \int \frac{u+2}{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{2}{u}\right) du = \frac{1}{2} \int du + \frac{1}{2} \int \frac{2}{u} du = \\ &= \frac{u}{2} + \ln|u| + c = \frac{2x+1}{2} + \ln|2x+1| + c \end{aligned}$$

آقا اجازه: همیشه صورت انتگرال رو برابر u بگیریم؟

استاد: چرا همیشه اما حل انتگرال یکم مشکلتر میشه

$$(h) \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx \Rightarrow u = 1 + \sin^2 x \Rightarrow du = 2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dx &= \frac{du}{\sin 2x} \Rightarrow \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin 2x}{u} \frac{du}{\sin 2x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ &= \ln|1 + \sin^2 x| + c \end{aligned}$$

$$(i) \int \cos^2 x \sin x dx \Rightarrow u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \cos^2 x \cdot \sin x dx &= \int u^2 \cdot \sin x \frac{du}{-\sin x} = - \int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + c \\ &= -\cos^3 x + c \end{aligned}$$

نگاهی عمیق تر به روش تغییر متغیر

تا اینجای کار با کمک قلق هایی که یاد گرفتیم انتگرال های داده شده را به سادگی از روش تغییر متغیر حل کردیم. اما واقعیت اینه که در برخی از مسائل این روشها ممکنه جوابگو نباشه و برای حل انتگرال ها باید به مقداری ابتکار عمل به خرج برید بنابراین در این قسمت برخی از این نوع مسائل رو با هم حل می کنیم.

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$\begin{array}{lll} (a) \int \tan x \, dx & (b) \int \cot x \, dx & (c) \int \sin^2 x \, dx \\ (d) \int \sec x \, dx & (e) \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} & (f) \int \frac{dx}{1+\cos x} \end{array}$$

حل:

$$\begin{aligned} (a) \int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \Rightarrow u = \cos x \Rightarrow dx = \frac{-du}{\sin x} \\ \int \frac{\sin x}{\cos x} dx &= \int \frac{\sin x}{u} \frac{-du}{\sin x} = - \int \frac{du}{u} = -\ln |u| = -\ln |\cos x| = \ln |\sec x| + c \end{aligned}$$

دقت کنید برای حل انتگرال بالا ابتدا تانژانت را به صورت سینوس به روی کسینوس نوشته سپس مخرج کسر را برابر متغیر جدید گرفتیم.

$$\begin{aligned} (b) \int \cot x \, dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow u = \sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x} \\ \int \frac{\cos x}{\sin x} dx &= \int \frac{\cos x}{u} \frac{du}{\cos x} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| = \ln |\sin x| + c \end{aligned}$$

تذکر مهم: دو تا انتگرال بالا فیلی مهم هستند سعی کنید اونا رو خوب یاد بگیرید

برای حل انتگرال (c) باید ابتداء کاری کنیم تا توان ۲ سینوس از بین بره بنابراین اون رو بر حسب $\cos 2x$ می نویسیم

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$(c) \int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

برای حل انتگرال $\cos 2x$ از روش تغییر متغیر به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} \int \cos 2x \, dx &\Rightarrow u = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2} \Rightarrow \int \cos 2x \, dx = \int \cos u \frac{du}{2} \\ &= \frac{\sin u}{2} + c = \frac{\sin 2x}{2} + c \end{aligned}$$

بنابراین انتگرال اصلی به صورت زیر در میار:

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

به همین صورت برای انتگرال کسینوس ۲ داریم:

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

حالت کلی تر انتگرال های بالا رو در فصلهای بعدی می فونیم

این دو تا انتگرال رو حفظ کنید ضرر نمی کنید !!

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x)$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} = \frac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x)$$

انتگرال (d) یعنی انتگرال سکانت یکی از جالبترین انتگرال هایی هست که در این کتاب باهاش آشنا می شیم در کتاب انتگرال فور این مسئله رو از چندین روش حل می کنیم در این فصل روش تغییر متغیر رو با هم کار می کنیم که البته تا حدودی ابتکاری هست.

$$\begin{aligned}
 (d) \int \sec x \, dx &= \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx \Rightarrow u = \sec x + \tan x \\
 &\Rightarrow du = (\sec x \cdot \tan x + \sec^2 x) dx = \sec x (\sec x + \tan x) dx \\
 &\Rightarrow dx = \frac{du}{\sec x (\sec x + \tan x)} = \frac{du}{\sec x \cdot u} \\
 &\Rightarrow \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx = \int \sec x \cdot \frac{u}{u} \frac{du}{\sec x \cdot u} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| \\
 &= \ln|\sec x + \tan x| + c
 \end{aligned}$$

دقت کنید برای حل انتگرال بالا تابع جلوی انتگرال رو در عبارت $(\sec x + \tan x)$ ضرب و تقسیم کرده سپس از روش تغییر متغیر استفاده کردیم.

به همین صورت برای مناسبه انتگرال کسکانت تابع جلوی انتگرال رو در عبارت $(\csc x + \cot x)$ ضرب و تقسیم کرده و از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم.

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x + \cot x| + c$$

$$(e) \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} \Rightarrow u = e^{2x} - 1 \Rightarrow du = 2e^{2x} dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2e^{2x}} = \frac{du}{2(u+1)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{du}{2(u+1)} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}(u+1)} \Rightarrow ????$$

تذکره مهم: همونطور که می بینید اگر طبق روال قبل عبارت زیر را دیکتال رو برابر متغیر جدید بگیریم انتگرالی که بدست میار از انتگرال اولیه پیچیده تر میشه بنابراین این قلق در اینجا جواب نمیده

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}(1-e^{-2x})}} = \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \Rightarrow u = e^{-x} \\ \Rightarrow du &= -e^{-x} dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{e^{-x}} = -\frac{du}{u} \\ \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} &= \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = -\int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{u} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\sin^{-1} u + c \\ \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} &= -\sin^{-1} e^{-x} + c\end{aligned}$$

همونطور که دیدید حل انتگرال بالا حالت ابتکاری داشت و مشابه مسائل قبل نبود بنابراین همیشه به نکات و قلق ها به چشم ابزاری نگاه کنید که می تونن در حل مسائل به شما کمک کنن نه اینکه مسائل رو برای شما حل کنن!!

$$\begin{aligned}(f) \int \frac{dx}{1+\cos x} &= \int \frac{1}{1+\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{1-\cos x} dx = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\cot x + \csc x + c\end{aligned}$$

دقت کنید برای حل انتگرال بالا تابع جلوی انتگرال رو در عبارت $(1-\cos x)$ ضرب و تقسیم کردیم.

تذکره مهم: تجربه نشون داده که مشکل اکثر بچه ها ضعف در ریاضیات پایه هست که باعث میشه دانش آموزا و دانشجوها نتونن مسائل رو درست و سالم حل کنن و اکثر موارد با اشتباهات پیش پا افتاده کار رو فراب می کنن!! یادم میار زمان دانشجویی که توی کلاس کنگور حساب دیفرانسیل درس می دارم وقتی بچه ها تست های مر و مشتق رو حل میکردن در مرحله آخر که باید با یه فاکتورگیری یا تفزیه ساده جواب رو بدست می آوردن به مشکل بر می خوردن!! بنابراین مباحثی مانند اتحادها، تفزیه و فاکتورگیری، معادله فط، نامساوی ها و ... رو چری بگیریم و سعی کنیم خوب بر اونها مسلط بشیم.

انتگرال های تعمیم یافته

در دروس پایه ریاضی مثل ریاضیات عمومی ۱ و ۲، روش حل انتگرال معمولاً جزء اصلی مسئله محسوب می‌شده و نمره زیادی دارد اما در دروس پیشرفته تر مثل معادلات دیفرانسیل و ریاضیات مهندسی بعضاً حل انتگرال قسمت فرعی مسئله هستند بنابراین هر چه زودتر بشه به جواب رسید بهتره!! در این بخش ما با استفاده از روش تغییر متغیر و به کار بردن هوشمندانه فرمولهای مشتق یکسری از روابط میانبر برای انتگرال های پر کاربرد بدست میاریم و در مراحل بعدی از این روابط برای حل سریعتر انتگرال ها استفاده می‌کنیم.

تذکر مهم: همه روابط و مسائل این بخش از روش تغییر متغیر به راحتی اثبات میشن.

دانشجویان گل ریاضی ۱ و ۲ توجه داشته باشن که استفاده از این فرمولها در امتحان منوط به اجازه کتبی از استاد مربوطه می باشد!!!

انتگرال های نمایی تعمیم یافته

طبق روال معمول اول چند تا رابطه از مشتق رو یادآوری می‌کنم

$$y = e^{f(x)} \Rightarrow y' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$$

یک حالت خاص مهم:

$$y = e^{kx} \Rightarrow y' = k \cdot e^{kx}$$

یادآوری؟

به عنوان مثال:

$$y = e^{\sin x} \Rightarrow y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

$$y = e^{x^2} \Rightarrow y' = 2x \cdot e^{x^2}$$

الآن با توجه به یادآوری بالا می‌توانیم بنویسیم:

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$$

یعنی اگر انتگرال تابع $e^{f(x)}$ به ما داده شده باشد اول نگاه می‌کنیم که آیا مشتق $f(x)$ یعنی $f'(x)$ در جلوی انتگرال وجود دارد یا نه؟ به عنوان مثال:

$$\int 2x \cdot e^{x^2} dx \Rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow \int 2x \cdot e^{x^2} dx = e^{x^2} + c$$

حالا به مثال زیر خوب نگاه کنید:

$$\int x^2 \cdot e^{2x^3} dx \Rightarrow f(x) = 2x^3 \Rightarrow f'(x) = 6x^2$$

همونطور که ملاحظه می‌کنید در جلوی تابع e^{2x^3} عبارت x^2 وجود داره نه $6x^2$ ، پس برای ساختن $6x^2$ یک کلک ساده

$$x^2 = \left(\frac{1}{6}\right) 6x^2 \quad \text{می‌زنیم:}$$

حالا $\frac{1}{6}$ را چون عدد ثابت از انتگرال بیرون می‌یاریم و انتگرال رو به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\int x^2 \cdot e^{2x^3} dx = \frac{1}{6} \int 6x^2 \cdot e^{2x^3} dx = \frac{1}{6} (e^{2x^3}) = \frac{e^{2x^3}}{6} + c$$

توجه: در انتگرال‌گیری از این ایده خیلی استفاده می‌کنیم.

یک حالت خاص زمانی هست که توان عدد نیز به صورت kx باشد (k عدد ثابت) در این حالت فرمول بالا به صورت زیر در می آید:

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$$

به عنوان مثال:

$$\int e^{5x} dx \Rightarrow k = 5 \Rightarrow \int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + c$$

$$\int e^{\frac{x}{2}} dx \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow \int e^{\frac{x}{2}} dx = 2 e^{\frac{x}{2}} + c$$

از فرمول بالا در دروس معادلات دیفرانسیل و ریاضی مهندسی خیلی استفاده می کنیم.

یه مثال دیگه:

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) e^{\tan x} dx \Rightarrow f(x) = \tan x$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \int (1 + \tan^2 x) e^{\tan x} dx = e^{\tan x} + c$$

آقا اجازه ؟ چرا به جای $\frac{1}{\cos^2(x)}$ گذاشتی $1 + \tan^2(x)$

استاد: واقعاً که!!! وقتی سر کلاس به جای درس گوش دادن یواشکی با موبایلِت چت می کنی نتیجه از این بهتر نمی شه!!!

مفط کردن این دو تا رابطه از نون شب واجب تره!

$$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$1 + \cot^2(x) = \csc^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

انتگرال های لگاریتمی تعمیم یافته

متما از مبحث مشتق فرمول مهم زیر فاطرتون هست:

یادآوری ۷

$$y = \ln f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

به عنوان مثال:

$$y = \ln(1 + x^2) \Rightarrow y' = \frac{2x}{1 + x^2}$$

$$y = \ln |\sin x| \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

الکون با توجه به فرمول بالا انتگرال زیر را می نویسیم:



$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$



تذکره: انتگرال بالا خیلی خیلی مهم هست (بخصوص برای درس معادلات دیفرانسیل) بنابراین به مثالهایی که می زنم خوب دقت کنید

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a) \int \frac{1}{x+5} dx \quad (b) \int \frac{2x}{1+x^2} dx \quad (c) \int \frac{1}{2x+1} dx \quad (d) \int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$$

$$(e) \int \tan x dx \quad (f) \int \cot x dx \quad (g) \int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx \quad (h) \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$(a) \int \frac{1}{x+5} dx \Rightarrow f = x+5 \Rightarrow f' = 1 \Rightarrow \frac{1}{x+5} = \frac{f'}{f}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x+5} dx = \ln|x+5| + c$$

$$(b) \int \frac{2x}{1+x^2} dx \Rightarrow f = 1+x^2 \Rightarrow f' = 2x \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} = \frac{f'}{f}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln|1+x^2| + c$$

تذکره: انتگرال بالا رو می‌تونید فیلی رامت از روش تغییر متغیر حل کنید.

$$(c) \int \frac{1}{2x+1} dx \Rightarrow f = 2x+1 \Rightarrow f' = 2$$

همونطور که می‌بینید برای اینکه انتگرال بالا به شکل $\frac{f'}{f}$ در بیاد باید در صورت انتگرال عدد ۲ وجود داشته باشه بنابراین به صورت زیر عمل می‌کنیم: (قبلا هم از این ایده استفاده کردیم یادتون که نرفته؟)

$$\Rightarrow \int \frac{1}{2x+1} dx = \int \frac{\frac{1}{2} \cdot 2}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + c$$

$$(d) \int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx \Rightarrow f = \ln x \Rightarrow f' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln|\ln x| + c$$

این انتگرال رو قبلا از روش تغییر متغیر هم حل کردیم.

$$\begin{aligned}
 (e) \int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \Rightarrow f = \cos x \Rightarrow f' = -\sin x \\
 \Rightarrow \int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c \\
 &= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + c = \ln|\sec x| + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (f) \int \cot x \, dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx \Rightarrow f = \sin x \Rightarrow f' = \cos x \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{f'}{f} \\
 \Rightarrow \int \cot x \, dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c
 \end{aligned}$$

نکته مهم: به نصیحت می‌کنم سعی کنید در تمامی مراحل زندگی یار تون باشه!

هرگاه با یک انتگرال کسری مواجه شدید اول به مخرج کسر نگاه کنید، اگر مشتق مخرج
توی صورت بود با خیال راحت از فرمول بالا استفاده کنید

$$\begin{aligned}
 (g) \int \frac{\sec^2 x}{\tan x} \, dx &= \int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} \, dx \Rightarrow f = \tan x \Rightarrow f' = 1 + \tan^2 x \\
 \Rightarrow \int \frac{\sec^2 x}{\tan x} \, dx &= \ln|\tan x| + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (h) \int \frac{e^x}{1 + e^x} \, dx &\Rightarrow f = 1 + e^x \Rightarrow f' = e^x \\
 \Rightarrow \int \frac{e^x}{1 + e^x} \, dx &= \ln|1 + e^x| + c
 \end{aligned}$$

انتگرال رادیکالی تعمیم یافته

یادآوری از مشتق:

یادآوری ۸

$$y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

به عنوان مثال داریم:

$$y = \sqrt{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

الئون با توجه به فرمول بالا می توانیم انتگرال زیر را بنویسیم:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$$

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر

$$(a) \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx \quad (b) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (c) \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

حل:

$$(a) \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx \Rightarrow f = \sin x \Rightarrow f' = \cos x \Rightarrow \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} = \frac{f'}{\sqrt{f}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = 2\sqrt{\sin x} + c$$

$$(b) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow f = x \Rightarrow f' = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{f'}{\sqrt{f}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$$

انتگرال بالا خیلی مهمه من جای شما بودم فقطش می کردم!

$$(c) \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} (2\sqrt{1+x^2} + c) = \sqrt{1+x^2} + c$$

انتگرال کسری تعمیم یافته

یادآوری از مشتق؛

$$y = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{-f'}{f^2}$$

یادآوری ۹

فرمول بالا رو می تونید خیلی راحت از رابطه مشتق کسر اثبات کنید.

به عنوان مثال:

$$y = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \cdot \tan x$$

و اما انتگرال کسری

$$\int \frac{f'}{f^2} dx = \frac{-1}{f} + c$$

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a) \int \frac{1}{(1+x)^2} dx \quad (b) \int \sec^2 x \cdot \sin x dx \quad (c) \int \frac{1}{x^2} dx$$

حل:

$$(a) \int \frac{1}{(1+x)^2} dx \Rightarrow f = 1+x \Rightarrow f' = 1 \Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{f'}{f^2} \\ \Rightarrow \int \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{-1}{1+x} + c$$

$$(b) \int \sec^2 x \cdot \sin x dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \Rightarrow f = \cos x \Rightarrow f' = -\sin x \\ \Rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos^2 x} dx = - \left(\frac{-1}{\cos x} \right) + c = \frac{1}{\cos x} + c = \sec x + c$$

دقت کنید وقتی یکم حرفه شدید دیکه نیازی نیست f و f' رو مشخص کنید و می تونید مستقیما جواب رو بدست بیارید.تذکره: باز هم تاکید می کنم انتگرال بالا رو میشه از روش تغییر متغیر هم حل کرد.

$$(c) \int \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow f = x \Rightarrow f' = 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{f'}{f^2} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x} + c$$

این انتگرال به نظرتون آشنا نیست؟؟؟

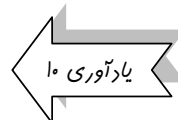
انتگرال های تعمیم یافته مثلثاتی

یادآوری از مشتق

$$y = \sin f(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot \cos f(x)$$

$$y = \cos f(x) \Rightarrow y' = -f'(x) \cdot \sin f(x)$$

$$y = \tan f(x) \Rightarrow y' = f'(x)(1 + \tan^2 f(x))$$



به عنوان مثال:

$$y = \sin(x^2 + 3x) \Rightarrow y' = (2x + 3) \cdot \cos(x^2 + 3x)$$

$$y = \cos \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}$$

$$y = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right)$$

الکون با توجه به فرمولهای گفته شده انتگرال های زیر رو داریم:

$$\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x) + c$$

$$\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int f'(x)(1 + \tan^2 f(x)) dx = \tan f(x) + c$$

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a) \int 3x^2 \cos x^3 dx \quad (b) \int \sin(5x+2)dx \quad (c) \int \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx$$

حل:

$$(a) \int 3x^2 \cos x^3 dx \Rightarrow f = x^3 \Rightarrow f' = 3x^2$$

$$\Rightarrow \int 3x^2 \cos x^3 dx = \sin x^3 + c$$

$$(b) \int \sin(5x+2)dx \Rightarrow f = 5x+2 \Rightarrow f' = 5$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \sin(5x+2) dx &= \frac{1}{5} \int 5 \sin(5x+2) dx = \frac{1}{5} (-\cos(5x+2)) + c \\ &= \frac{-\cos(5x+2)}{5} + c \end{aligned}$$

$$(c) \int \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx \Rightarrow f = \frac{x}{2} \Rightarrow f' = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx = 2 \int \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx = 2 \tan \frac{x}{2} + c$$

یک حالت خاص مهم برای فرمولهای بالا زمانی است که داشته باشیم $f = kx$ بنابراین $f' = k$ در این حالت

فرمولهای بالا به صورت زیر ساده می شوند: (این فرمولها در درس ریاضیات مهندسی استفاده زیادی دارد)

$$\int \cos kx \, dx = \frac{1}{k} \sin kx + c$$

$$\int \sin kx \, dx = \frac{-1}{k} \cos kx + c$$

$$\int (1 + \tan^2 kx) dx = \frac{1}{k} \tan kx + c$$

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a) \int \cos 5x \, dx \quad (b) \int \sin \pi x \, dx \quad (c) \int \cos \frac{3x}{2} \, dx$$

$$(d) \int \sin \frac{x}{2} \, dx \quad (e) \int \cos \frac{\pi x}{L} \, dx \quad (f) \int \sin x \cdot \cos x \, dx$$

حل:

$$(a) \int \cos 5x \, dx = \frac{1}{5} \sin 5x + c$$

$$(b) \int \sin \pi x \, dx = \frac{-1}{\pi} \cos \pi x + c$$

$$(c) \int \cos \frac{3x}{2} \, dx = \frac{1}{\frac{3}{2}} \sin \frac{3x}{2} + c = \frac{2}{3} \sin \frac{3x}{2} + c$$

$$(d) \int \sin \frac{x}{2} \, dx = -2 \cos \frac{x}{2} + c$$

$$(e) \int \cos \frac{\pi x}{L} \, dx = \frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi x}{L} + c$$

$$(f) \int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \cos 2x + c \right) \\ = \frac{-1}{4} \cos 2x + c$$

مسائل فصل دوم

۱- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

$$(1) \int \sec^2 x \cdot e^{\tan x} dx$$

$$(2) \int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$$

$$(3) \int \frac{\cos \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$(4) \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$$

$$(5) \int \frac{2x+1}{x+5} dx$$

$$(6) \int \frac{dx}{e^x - 1}$$

$$(7) \int \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2} dx$$

$$(8) \int \frac{1 + \ln x}{3 + x \cdot \ln x} dx$$

$$(9) \int x\sqrt{x-1} dx$$

$$(10) \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$$

۲- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل مخ گرمی)

$$(1) \int \sqrt[3]{8x^5 + 32x^3} dx$$

$$(2) \int \frac{1-2x}{5+x} dx$$

$$(3) \int \frac{x^2}{5+x^6} dx$$

$$(4) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

$$(5) \int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$(6) \int \frac{\cos x}{4 + \sin^2 x} dx$$

$$(7) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$$

$$(8) \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x}$$

$$(9) \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$$

$$(10) \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$$

فصل سوم : تغییر متغیرهای مثلثاتی

همانطور که در فصل قبل دیدیم برخی از انتگرال ها با استفاده از تغییر متغیرهای معمول قابل حل نیستند به عنوان مثال فرض کنید مناسبه انتگرال زیر فوایسته شده باشد:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

اگر طبق روال معمول عبارت زیر را دیکال را برابر u بگیریم داریم:

$$u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{2x}$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{u} \left(-\frac{du}{2x}\right) = -\frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{u}}{x} du$$

چون x از انتگرال ساده نشد باید آن را بر حسب u بنویسیم.

$$u = 1 - x^2 \Rightarrow x = \sqrt{1-u}$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{u}}{x} du = -\frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}} du$$

همانطور که می بینید مناسبه انتگرال بالا از انتگرال اولیه هم مشکلتر شد بنابراین این روش در اینجا کارساز نیست به همین دلیل برای مناسبه اینگونه انتگرال ها از تغییر متغیرهای مثلثاتی استفاده می کنیم. انتگرالهایی که با استفاده از این روش حل می شوند به سه دسته کلی تقسیم می شوند که عبارتند از:

الف) انتگرال های شامل $\sqrt{a^2 - x^2}$

ب) انتگرال های شامل $\sqrt{a^2 + x^2}$ یا $\frac{1}{x^2 + a^2}$

ج) انتگرال های شامل $\sqrt{x^2 - a^2}$

که در ادامه به توضیح هر یک از موارد بالا می پردازیم.

الف) انتگرال های شامل $\sqrt{a^2 - x^2}$

این انتگرال ها را اغلب می توان با جانشینی $x = a \sin \theta$ به صورت زیر حل کرد:

$$\begin{aligned} x = a \sin \theta &\Rightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \\ &= a \cos \theta \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

مثال: انتگرال زیر را مناسبه کنید:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$$

حل:

$$\sqrt{16 - x^2} = \sqrt{4^2 - x^2} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow x = 4 \sin \theta \Rightarrow dx = 4 \cos \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \sqrt{16 - x^2} = \sqrt{16 - 16 \sin^2 \theta} = 4 \cos \theta$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \int \frac{4 \cos \theta d\theta}{4 \cos \theta} = \int d\theta = \theta + c$$

ملاحظه می کنید که جواب آخر بر حسب θ در آمد که باید آن را بر حسب x بنویسیم بنابراین به صورت زیر عمل می کنیم:

$$x = 4 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{x}{4} \Rightarrow \theta = \sin^{-1} \left(\frac{x}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{x}{4} \right) + c$$

تذکره: دقت کنید انتگرال بالا را می توان از روابط فصل اول به صورت مستقیم حل کرد.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9 - x^2)^3}}$$

$$x = 3 \sin \theta \Rightarrow dx = 3 \cos \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \sqrt{(9-x^2)^3} = (9-x^2)^{\frac{3}{2}} = (9-9\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} = (3^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} = 27\cos^3\theta$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}} = \int \frac{3 \cos \theta}{27 \cos^3 \theta} d\theta = \frac{1}{9} \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{9} \int (1 + \tan^2 \theta) d\theta = \frac{1}{9} \tan \theta$$

برای نوشتن جواب آخر بر حسب x به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

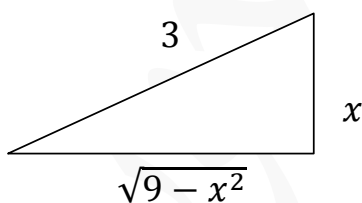
ابتدا $\sin \theta$ را بر حسب x می‌نویسیم:

$$x = 3 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{x}{3}$$

سپس مثلث قائم الزاویه ای رسم کرده و اضلاع آن را طوری نام‌گذاری می‌کنیم که سینوس آن برابر $\frac{x}{3}$ شود.

$$\sin \theta = \frac{\text{ضلع روبرو}}{\text{وتر}} = \frac{x}{3}$$

بنابراین ضلع روبرو را برابر x و وتر را برابر 3 قرار می‌دهیم پس طبق قضیه فیثاغورث ضلع مجاور برابر $\sqrt{9-x^2}$ می‌شود و مثلث مورد نظر به شکل زیر در می‌آید.



اکنون با توجه به مثلث بالا به آسانی می‌توانیم $\tan \theta$ را بدست آوریم.

$$\tan \theta = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}} = \frac{1}{9} \tan \theta + C = \frac{1}{9} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} + C$$

ب) انتگرال های شامل $\sqrt{a^2 + x^2}$ یا $\frac{1}{x^2 + a^2}$

این انتگرال ها را می توان با جانشینی $x = a \tan \theta$ به صورت زیر حل نمود.

$$\begin{aligned} x = a \tan \theta &\Rightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = a \sec \theta \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25 + x^2}}$$

حل:

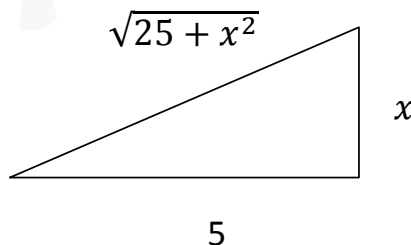
$$x = 5 \tan \theta \Rightarrow dx = 5 \sec^2 \theta d\theta$$

$$\sqrt{25 + x^2} = \sqrt{25 + 25 \tan^2 \theta} = 5 \sec \theta$$

$$\int \frac{\sec^2 \theta}{\sec \theta} d\theta = \int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c$$

الکون برای نوشتن جواب آخر بر حسب x مانند مثال قبل مثلث قائم الزاویه ای به صورت زیر رسم می کنیم:

$$x = 5 \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{x}{5} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$



با توجه به مثلث بالا داریم:

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{25+x^2}}{5}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{25+x^2}} &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c = \ln \left| \frac{\sqrt{25+x^2}}{5} + \frac{x}{5} \right| + c = \\ &= \ln |\sqrt{25+x^2} + x| - \ln 5 + c = \ln |\sqrt{25+x^2} + x| + c' \end{aligned}$$

در حالت کلی داریم:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + c$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{(1+4x^2)^2}$$

حل: دقت کنید در روابط مورد استفاده در اینجا فرض شده ضریب x^2 برابر یک است بنابراین به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$1+4x^2 = 4\left(\frac{1}{4} + x^2\right) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

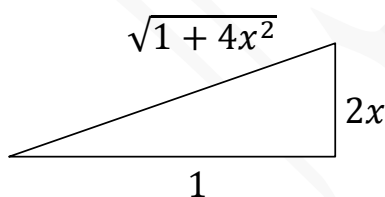
$$x = \frac{1}{2} \tan \theta \Rightarrow dx = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \theta) d\theta$$

$$1 + 4x^2 = 1 + 4\left(\frac{1}{2}\tan\theta\right)^2 = 1 + \tan^2\theta$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+4x^2)^2} &= \int \frac{\frac{1}{2}(1+\tan^2\theta)d\theta}{(1+\tan^2\theta)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d\theta}{(1+\tan^2\theta)} = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{4}(\theta + \sin\theta \cdot \cos\theta)\end{aligned}$$

الآن باید جواب را بر حسب x بنویسیم:

$$x = \frac{1}{2}\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x$$



با توجه به مثلث بالا داریم:

$$\sin\theta = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$$

همچنین برای مناسبه θ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\tan\theta = 2x \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(2x)$$

$$\int \frac{dx}{(1+4x^2)^2} = \frac{1}{4}(\theta + \sin\theta \cdot \cos\theta) = \frac{1}{4}\left(\tan^{-1}(2x) + \frac{2x}{1+4x^2}\right) + c$$

ج) انتگرال های شامل $\sqrt{x^2 - a^2}$

در این انتگرال ها از تغییر متغیر $x = a \sec \theta$ استفاده می کنیم:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2 (\sec^2 \theta - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = a \tan \theta$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

حل:

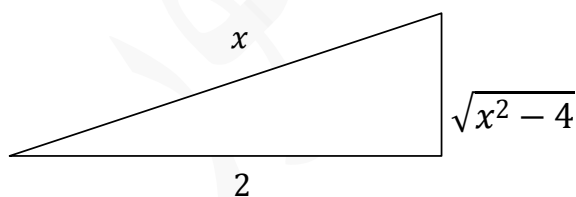
$$x = 2 \sec \theta \Rightarrow dx = 2 \sec \theta \cdot \tan \theta d\theta$$

$$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{4 \sec^2 \theta - 4} = 2 \tan \theta$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = \int \frac{2 \sec \theta \cdot \tan \theta}{2 \tan \theta} d\theta = \int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c$$

الکون باید جواب را بر حسب x بنویسیم:

$$x = 2 \sec \theta \Rightarrow \sec \theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{x}$$



با توجه به مثلث بالا داریم:

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = \ln|\sec\theta + \tan\theta| = \ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}\right| + c$$

البته جواب بالا را می توان به شکل ساده تر زیر هم نوشت.

$$\begin{aligned} \ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}\right| + C &= \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 - 4}| - \ln 2 + c \\ &= \ln|x + \sqrt{x^2 - 4}| + c' \end{aligned}$$

دقت کنید چون $\ln 2$ عددی ثابت است بنابراین جمع آن با ثابت c باز هم عددی ثابت می شود.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$$

حل:

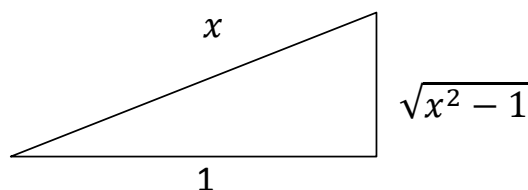
$$x = \sec \theta \Rightarrow dx = \sec \theta \cdot \tan \theta d\theta$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\sec^2 \theta - 1} = \tan \theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx &= \int \frac{\sec \theta \cdot \tan^2 \theta}{\sec \theta} d\theta = \int \tan^2 \theta d\theta = \int (\tan^2 \theta + 1 - 1) d\theta \\ &= \int (\tan^2 \theta + 1) d\theta - \int d\theta = \tan \theta - \theta + C \end{aligned}$$

مشابه مثالهای قبل جواب آخر را بر حسب x می نویسیم.

$$\sec \theta = x \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{x}$$



$$\Rightarrow \tan \theta = \sqrt{x^2 - 1} \quad , \quad \theta = \sec^{-1} x$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx = \tan \theta - \theta + c = \sqrt{x^2 - 1} - \sec^{-1} x + c$$

خب فکر می‌کنم تا اینجای کار مطلب رو خوب یاد گرفته باشید

آقا اجازه: ما همه رو فول شدیم دیکه هر سوالی تو امتحان بدن حل میکنیم.

استاد: شرمندۀ افلاقی و ورزشیت توی امتحان که از این سوالای آبکی نمیدن که شما راحت حلش کنید اینطوری که همه میکنن استاده کلایه!!

آقا اجازه: پس چه سوالایی می‌دن؟

استاد: بالاخره به جوری می‌پیشن، چندتا مثال می‌زنم اوضاع دستتون بیاد.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

حل:

همانطور که می‌بینید عبارت زیر را دیکال به شکل استاندارد $a^2 - u^2$ یا $u^2 - a^2$ نیست بنابراین آن را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} 2x - x^2 &= 2x - x^2 - 1 + 1 = -(x^2 - 2x + 1) + 1 = -(x - 1)^2 + 1 \\ &= 1 - (x - 1)^2 \end{aligned}$$

الآن از تغییر متغیر $u = x - 1$ استفاده می‌کنیم:

$$u = x - 1 \Rightarrow du = dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

ملاحظه می‌کنیم که انتگرال به شکل استاندارد در آمد بنابراین با استفاده از تغییر متغیر $u = \sin \theta$ داریم.

$$u = \sin \theta \Rightarrow du = \cos \theta d\theta, \quad \sqrt{1 - u^2} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \cos \theta$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta} = \int d\theta = \theta = \sin^{-1} u = \sin^{-1}(x - 1) + c$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

حل:

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x - 1)^2 + 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{(x - 1)^2 + 1}}$$

الآن مشابه مثال قبل از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم تا انتگرال به شکل استاندارد در آید.

$$u = x - 1 \Rightarrow du = dx \quad x = u + 1$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{(x - 1)^2 + 1}} = \int \frac{(u + 1) du}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

الآن می‌توانیم از تغییر متغیر $u = \tan \theta$ استفاده کنیم.

$$u = \tan \theta \Rightarrow du = (1 + \tan^2 \theta) d\theta = \sec^2 \theta d\theta$$

$$\sqrt{u^2 + 1} = \sqrt{(1 + \tan^2 \theta)} = \sqrt{\sec^2 \theta} = \sec \theta$$

$$\int \frac{(u+1) du}{\sqrt{u^2+1}} = \int \frac{(1+\tan\theta)\sec^2\theta d\theta}{\sec\theta} = \int (1+\tan\theta)\sec\theta d\theta =$$

$$\int \sec\theta d\theta + \int \tan\theta \cdot \sec\theta d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + \sec\theta + C$$

الآن جواب را بر حسب u می نویسیم (مثلث رو فودتون بکشین)

$$u = \tan \theta \Rightarrow \sec \theta = \sqrt{u^2 + 1}$$

$$\int \frac{(u+1) du}{\sqrt{u^2+1}} = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + \sec\theta = \ln|\sqrt{u^2+1} + u| + \sqrt{u^2+1}$$

$$= \ln|\sqrt{(x-1)^2+1} + (x-1)| + \sqrt{(x-1)^2+1} + c$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{(4x^2 + 4x + 5)^2}$$

حل:

ابتدا مخرج انتگرال را به صورت استاندارد می نویسیم.

$$4x^2 + 4x + 5 = (2x + 1)^2 + 4$$

سپس از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم:

$$u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \frac{dx}{(4x^2 + 4x + 5)^2} = \int \frac{dx}{((2x + 1)^2 + 4)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{(u^2 + 4)^2}$$

در مرحله آخر از تغییر متغیر مثلثاتی استفاده می‌کنیم.

$$u = 2\tan\theta \Rightarrow du = 2(1 + \tan^2\theta)d\theta = 2\sec^2\theta d\theta$$

$$u^2 + 4 = 4(\tan^2\theta + 1) = 4\sec^2\theta$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{du}{(u^2 + 4)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{2\sec^2\theta}{(4\sec^2\theta)^2} d\theta = \frac{1}{16} \int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} = \frac{1}{16} \int \cos^2\theta d\theta \\ &\Rightarrow \frac{1}{16} \int \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{32}(\theta + \sin\theta \cdot \cos\theta) \end{aligned}$$

الکون جواب را بر حسب u می‌نویسیم (مثلث رو خودتون بکشین)

$$u = 2\tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4}}, \quad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{u^2 + 4}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} \int \cos^2\theta d\theta &= \frac{1}{32}(\theta + \sin\theta \cdot \cos\theta) = \frac{1}{32}\left(\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{2u}{u^2 + 4}\right) \\ &= \frac{1}{32}\left(\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{2}\right) + \frac{2(2x+1)}{u^2 + 4}\right) + C \end{aligned}$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \text{ بایگزینی}$$

تغییر متغیر بالا معمولاً برای مناسبه انتگرالهایی به فرم زیر مورد استفاده قرار می گیرد:

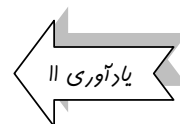
$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}$$

که a, b, c اعدادی ثابت هستند.

قبل از ادامه کار، روابط زیر را یادآوری می کنیم.

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$$



مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \csc x \, dx$$

حل:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx \Rightarrow dx = \frac{2 \, dt}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \, dt}{1 + t^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2 \, dt}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x \, dx$$

حل:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx \Rightarrow dx = \frac{2 \, dt}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \, dt}{1 + t^2}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\frac{2 \, dt}{1 + t^2}}{\frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = \int \frac{2 \, dt}{1 - t^2}$$

برای حل انتگرال بالا باید کسر $\frac{2}{1-t^2}$ رو تفکیک کنید (اگر تفکیک کسر رو بلد نیستید نگران نباشید چون در فصل بعدی مفصلاً راجع بهش صحبت می‌کنیم).

$$\frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}$$

دقت کنید که اگر از سمت راست تساوی بالا مفرج مشترک بگیرید به کسر سمت چپ می‌رسید.

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \, dt}{1-t^2} &= \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \ln|1+t| - \ln|1-t| = \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \\ &= \ln \left| \frac{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \right| + c \end{aligned}$$

خب، این هم از شکل دوم جواب انتگرال سکانت.

البته معمولاً در مسائل از همون شکل اول جواب، یعنی $\ln|\sec x + \tan x|$ استفاده میشه.

آقا اجازه: چرا دوتا جواب با هم فرق داره؟

استاره: فرق نداره عزیز دل برادر!! قبول ندارای نگاه کن:

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \right| &= \ln \left| \frac{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \right| = \ln \left| \frac{\left(1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right| = \\ &= \ln \left| \frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right| = \ln \left| \frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right| \end{aligned}$$

آلنوں با تویہ به روابط یادآوری || داریع:

$$\frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x} \quad , \quad \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan x$$

بنابر این:

$$\ln \left| \frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right| = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| = \ln |\sec x + \tan x|$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$$

حل:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx \Rightarrow dx = \frac{2 dt}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 dt}{1 + t^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 + 4\cos x} &= \int \frac{\frac{2 dt}{1 + t^2}}{5 + 4 \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 9} = 2 \left(\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{t}{3} \right) \right) \\ &= \frac{2}{3} \tan^{-1} \left(\frac{t}{3} \right) + c = \frac{2}{3} \tan^{-1} \left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{3} \right) + c \end{aligned}$$

مسائل فصل سوم

۱- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}$$

$$(2) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}}$$

$$(3) \int \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$(5) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{25+x^2}}$$

$$(6) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-9}}$$

$$(7) \int \frac{dx}{7-3 \sin x + 6 \cos x}$$

$$(8) \int \frac{dx}{3+2 \cos x}$$

۲- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل منگ گرمی)

$$(1) \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} dx$$

$$(2) \int \frac{x^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx$$

$$(3) \int \frac{dx}{x \sqrt{1-3x^2}}$$

$$(4) \int \frac{\sqrt{16+x^2}}{x^4} dx$$

$$(5) \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$(6) \int \frac{x dx}{x^2-2x+6}$$

$$(7) \int \frac{dx}{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(8) \int \frac{x dx}{(3-2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(9) \int \frac{dx}{1+3 \cos x}$$

$$(10) \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

فصل چهارم: انتگرال گیری از کسره های گویا

در این فصل درباره انتگرال گیری از کسره های گویا بحث می کنیم قبل از شروع بحث بهتره یادآوری کنیم که منظور از کسر

$$\text{گویا کسری هست که صورت و مخرجش چند جمله ای باشد مانند: } \frac{2x}{x^2+5} \text{ یا } \frac{3}{5x-7}$$

اما چیزی که در این فصل بیشتر راجع به اون بحث می کنیم تجزیه کسره های گویا هستش چون وقتی کسری رو تجزیه کردید انتگرال گیری از اون مثل آب خوردنه! بنابراین اول می ریم سراغ بحث تجزیه کسرها

تجزیه کسره های گویا

در این قسمت تجزیه کسره های گویا را به صورت مرحله به مرحله بررسی می کنیم قبل از شروع بحث باید یادآوری کنم که منظور از تجزیه کسر این است که آن را به صورت مجموع چند کسر بنویسیم که در مخرج هر یک از آنها فقط یکی از عوامل وجود داشته باشد.

به عنوان مثال کسر $\frac{5}{(x-1)(x+2)}$ به صورت زیر تجزیه می شود (همان طور که می بینید در مخرج کسر حاصلضرب دو عامل درجه اول وجود دارد)

$$\frac{5}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

مرحله اول: تقسیم صورت بر مخرج (در صورت نیاز) و ساده سازی کسر

در ابتدای کار فرض می کنیم که درجه صورت کسر کوچکتر از مخرج هست (در غیر اینصورت باید صورت رو بر مخرج تقسیم کنیم که بعدا بهش اشاره می کنیم) سپس صورت و مخرج کسر را تا آن جا که ممکن است به حاصلضرب عوامل درجه اول و دوم تجزیه کرده و ساده میکنیم به عنوان مثال:

$$\frac{x^2-1}{x^3+x^2-2x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+2)} = \frac{x+1}{x(x+2)}$$

مرحله دوم: تفکیک کسر و نوشتن آن به صورت مجموع چند کسر ساده

بعد از ساده سازی، در مفرج کسر سر و کله یکی از چهار عامل زیر پیدا می شود:

۱) عامل درجه اول غیر تکراری (با توان یک) مانند $(x-1)$ یا $(3x+5)$ و بطور کلی $(ax+b)$
در این حالت برای تفکیک کسر به ازای هر یک از این عاملها یک کسر به صورت $\frac{A}{ax+b}$ در سمت راست تساوی قرار می دهیم که ثابت A باید تعیین شود به عنوان مثال:

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \text{ثابت های } A, B \text{ باید تعیین شوند}$$

$$\frac{x+2}{x^2+x} = \frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow \text{ثابت های } A, B \text{ باید تعیین شوند}$$

۲) عامل درجه اول تکراری (با توان بزرگتر از یک) مانند $(x+1)^3$ یا $(4x-5)^2$ بطور کلی $(ax+b)^n$
در این حالت به ازای هر عامل $(ax+b)^n$ تعداد n کسر به صورت زیر در سمت راست تساوی قرار می دهیم:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

که ثابتهای $A_1, A_2, A_3 \dots$ باید تعیین شوند.

به عنوان مثال:

$$\frac{1}{(x+5)(x-1)^3} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

دقت کنید در کسر بالا $(x+5)$ عامل درجه اول غیر تکراری است بنابراین به جای آن یک کسر به صورت

$\frac{A}{x+5}$ قرار می دهیم از طرفی $(x-1)^3$ یک عامل درجه اول تکراری است بنابراین به جای آن سه کسر به صورت $\frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$ قرار می دهیم.

۳) عامل درجه دوم (غیر قابل تجزیه) غیر تکراری مانند $x^2 + 3$ یا بطور کلی $ax^2 + bx + c$

در این حالت به ازای هر یک از این عاملها یک کسر به صورت $\frac{Ax+b}{ax^2+bx+c}$ در سمت راست تساوی قرار

می دهیم به عنوان مثال:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)}$$

۴) عامل درجه دوم تکراری مانند $(x^2 + 1)^3$ یا بطور کلی $(ax^2 + bx + c)^n$

در این حالت به ازای هر عامل $(ax^2 + bx + c)^n$ تعداد n کسر به صورت زیر در سمت راست تساوی

قرار می دهیم:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

به عنوان مثال:

$$\frac{x+5}{x(x^2+1)^3} = \frac{C}{x} + \frac{A_1x+B_1}{x^2+1} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(x^2+1)^3}$$

تذکر یک: منظور از عامل درجه دوم عاملی است که قابل تجزیه به عوامل درجه اول نباشد به عنوان مثال عبارت

$x^2 + 3x - 10$ عبارت درجه دوم ممسوب نمی شود چون می توان آن را به صورت حاصلضرب دو عامل درجه

اول به صورت زیر نوشت (مثلا با استفاده از اتحاد جمله مشترک)

$$x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$$

تذکر دو: عباراتی به شکل $x^2 + a^2$ (مثل $x^2 + 9$) تجزیه پذیر نیستند و عامل درجه دوم ممسوب میشن اما عباراتی

به شکل $x^2 - a^2$ با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می شن.

به طور کلی داریم:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \Delta \geq 0 \quad \text{قابل تجزیه}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \quad \text{غیر قابل تجزیه}$$

مرحله سوم: مخرج مشترک گیری و درست آوردن ثابتها

بعد از اینکه کسر اصلی را به صورت جمع چندین کسر نوشتیم در مرحله بعد بین کسرهای سمت راست تساوی مخرج مشترک می گیریم و صورت کسر حاصل را برابر صورت کسر اصلی قرار می دهیم.

به مثال زیر دقت کنید:

$$\frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{3x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow 3x-1 = A(x+1) + B(x-1)$$

الکون در دو طرف تساوی بالا عددی دلخواه (معمولاً ریشه های مخرج) را به ازای x قرار می دهیم تا ثابت های A, B درست آیند.

$$x = 1 \Rightarrow 3(1) - 1 = A(1+1) + B(1-1) \Rightarrow A = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow 3(-1) - 1 = (1)(-1+1) + B(-1-1) \Rightarrow B = 2$$

$$\Rightarrow \frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

فلاصه مراحل تجزیه کسر:

مرحله اول: تقسیم صورت بر مخرج (در صورت نیاز) و ساده سازی کسر

مرحله دوم: تفکیک کسر و نوشتن آن به صورت مجموع چند کسر ساده

مرحله سوم: مخرج مشترک گیری و بدست آوردن ثابت ها

مثال: کسر $\frac{1}{x(1+x^2)}$ را تجزیه کنید

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2) + x(Bx+c)}{x(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow 1 = A(1+x^2) + x(Bx+c)$$

دقت کنید در تساوی بالا سه مجهول داریم بنابراین باید سه عدد دلخواه به x بدهیم تا مجهولات مشخص شوند یکی از این اعداد می تواند ریشه x یعنی صفر باشد اما عامل دیگر یعنی $(1+x^2)$ ریشه حقیقی ندارد بنابراین دو عدد دلخواه مثلا ۱ و -۱ را به جای x قرار می دهیم.

$$x = 0 \Rightarrow 1 = A(1+0) + (0)(B(0)+c) \Rightarrow A = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = (1)(2) + (1)(B+c) \Rightarrow B+c = -1$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = (1)(2) + (-1)(-B+c) \Rightarrow B-c = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B+c = -1 \\ B-c = -1 \end{cases} \Rightarrow B = -1, C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

یک روش دیگر برای بدست آوردن مجهولات به این صورت است که پس از مساوی قرار دادن صورت کسرهای طرفین رابطه را بر حسب توانهای x مرتب می‌کنیم:

$$\Rightarrow 1 = A(1 + x^2) + x(Bx + c)$$

$$\Rightarrow 1 = A + Ax^2 + Bx^2 + cx = (A + B)x^2 + cx + A$$

الآن برای بدست آوردن ثابتها، ضرایب توانهای مشابه x در دو طرف رابطه را مساوی هم قرار می‌دهیم یعنی:

$$\text{ضریب } x \text{ در طرف راست معادله} = \text{ضریب } x \text{ در طرف چپ معادله}$$

$$\text{ضریب } x^2 \text{ در طرف راست معادله} = \text{ضریب } x^2 \text{ در طرف چپ معادله}$$

$$\text{عدد ثابت در طرف راست معادله} = \text{عدد ثابت در طرف چپ معادله}$$

آقا اجازه: طرف چپ تساوی که x^2 و x نداره؟

استاد: چرا داره شما نمی‌بینی!!!! در واقع سمت چپ تساوی رو می‌تونیم به صورت زیر بنویسیم:

$$0x^2 + 0x + 1 = (A + B)x^2 + cx + A$$

یعنی هر موقع توانی از x وجود نداره ضریب اون صفر بوده بنابراین

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = 1, B = -1, C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

مثال: کسر $\frac{x-2}{x^2(1+x)}$ را تفریه کنید

$$\frac{x-2}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1+x}$$

دقت کنید x^2 یک عامل درجه اول تکراری محسوب میشه

در ادامه به جای مخرج مشترک گیری بهتره که طرفین رابطه بالا را در مخرج عبارت سمت چپ یعنی $x^2(1+x)$ ضرب کنیم

$$\Rightarrow x - 2 = Ax(1+x) + B(1+x) + Cx^2 = (A+C)x^2 + (A+B)x + B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ A+B=1 \\ B=-2 \end{cases} \Rightarrow A=3, B=-2, C=-3$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{x^2(1+x)} = \frac{3}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{-3}{1+x} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{1+x}$$

مثال: کسر $\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}$ را تفزیه کنید

در اینجا چون درجه صورت بزرگتر از مخرج هست بنابراین می بایست صورت را بر مخرج تقسیم کنیم (با استفاده از تقسیم چندجمله ایها) دقت کنید که جواب رو باید به صورت زیر بنویسیم:

$\frac{\text{باقی مانده}}{\text{مخرج}} + \text{خارج قسمت} = \frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}}$
--

$$\frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 + \frac{-(x+2)}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 - \frac{x+2}{x^3 - x^2 - 2x}$$

در ادامه کار باید کسر $\frac{x+2}{x^3-x^2-2x}$ رو تفکیک کنیم دقت کنید چون مخرج کسر درجه سوم هست باید ابتدا آن را به حاصل ضرب عوامل درجه اول و دوم تفزیه کنیم:

$$\Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x-2)(x+1)$$

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow x+2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

$$x=0 \Rightarrow 2 = A(-2)(1) + B(-1)(0) + C(0)(-2) \Rightarrow A = -1$$

$$x=-1 \Rightarrow 1 = A(-3)(0) + B(-1)(0) + C(-1)(-3) \Rightarrow C = \frac{1}{3}$$

$$x=2 \Rightarrow 4 = A(0)(3) + B(2)(3) + C(2)(0) \Rightarrow B = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{\frac{2}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 - \frac{x+2}{x^3 - x^2 - 2x}$$

$$= x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x-2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} \right)$$

انتگرال گیری از کسرهای گویا

همانطور که در ابتدای فصل گفتیم بیشترین دردرس انتگرال گیری از کسرهای گویا مربوط به تجزیه کسر میشه و بعد از اینکه کسر رو تجزیه کردید کار خاصی باقی نمی مونه اما با این حال یکسری از ریزه کاریها رو باید حواستون باشه! که در اینجا به صورت خلاصه براتون توضیح می دم:

گفتیم که بعد از تجزیه کسر مفرج آن به چهار شکل در می آید که برای هر حالت به صورت زیر عمل می کنیم:

۱ - اگر مفرج کسر عامل درجه اول غیر تکراری باشد

در این حالت جواب انتگرال به صورت لگاریتمی طبیعی در می آید و به صورت کلی داریم:

$$\int \frac{C}{ax+b} dx = C \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{C}{a} \ln|ax+b|$$

مثال: (ما این مثال رو از انتگرال های تعمیم یافته حل می کنیم البته میشه از روش تغییر متغیر هم استفاده کرد)

$$\int \frac{5}{2x-3} dx = 5 \int \frac{1}{2x-3} dx = 5 \left(\frac{1}{2} \right) \int \frac{2}{2x-3} dx = \frac{5}{2} \ln|2x-3| + c$$

۲- اگر مفرج کسر عامل درجه اول تکراری باشد

در این حالت از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم (دافل پراتنز را u می گیریم) و جواب به صورت کسری در می آید

مثال:

$$\int \frac{dx}{(2x-7)^3} \Rightarrow u = 2x-7 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(2x-7)^3} = \int \frac{\frac{du}{2}}{u^3} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{-2}}{-2} \right) = \frac{-1}{4u^2} + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(2x-7)^3} = \frac{-1}{4(2x-7)^2} + c$$

۳- اگر مخرج کسر عامل درجه دوم غیر تکراری باشد

در این حالت برای سادگی ابتدا فرض می‌کنیم مخرج کسر به صورت مربع کامل $(x^2 + a^2)$ باشد (در غیر اینصورت باید مخرج را به شکل مربع کامل در آوریم که در ادامه به توضیح آن می‌پردازیم)

شکل کلی انتگرال در این حالت به صورت است:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + a^2} dx$$

برای حل انتگرال بالا آن را به صورت زیر به دو قسمت تفکیک می‌کنیم:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{Ax}{x^2 + a^2} dx + \int \frac{B}{x^2 + a^2} dx$$

که جواب انتگرال اول به صورت لگاریتم طبیعی و جواب انتگرال دوم به صورت آرک تانژانت است یعنی داریم:

$$\int \frac{Ax}{x^2 + a^2} dx = A \left(\frac{1}{2} \right) \int \frac{2x}{x^2 + a^2} dx = \frac{A}{2} \ln|x^2 + a^2| + c$$

$$\int \frac{B}{x^2 + a^2} dx = B \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{B}{a} \operatorname{Arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

تذکره: فرمول زیر رو هتما حفظ کنید:

$$\int \frac{1}{u^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \left(\frac{u}{a} \right) + c$$

مثال:

$$\int \frac{5x+1}{x^2+4} dx = \int \frac{5x}{x^2+4} dx + \int \frac{1}{x^2+4} dx$$

برای راحتی کار می‌توانیم هر یک از انتگرال‌های بالا را جداگانه حساب کنیم:

$$\int \frac{5x}{x^2+4} dx = 5 \int \frac{x}{x^2+4} dx = 5 \left(\frac{1}{2} \right) \int \frac{2x}{x^2+4} dx = \frac{5}{2} \ln(x^2+4) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+4} dx = \int \frac{1}{x^2+2^2} dx = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} + c$$

بنابراین جواب نهایی برابر است با:

$$\int \frac{5x+1}{x^2+4} dx = \frac{5}{2} \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + c$$

تذکره: اگر مخرج انتگرال داده شده به صورت مربع کامل نباشد باید آن را مربع کامل کنیم (یعنی به شکل $u^2 + a^2$ درآوریم) به عنوان نمونه:

$$x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x+1)^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$x^2 + 4x + 8 = x^2 + 4x + 4 + 4 = (x+2)^2 + 2^2$$

مثال:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + (\sqrt{2})^2} \Rightarrow u = x+1 \Rightarrow du = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x+1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c$$

۴- اگر مخرج کسر عامل درجه دوم تکراری باشد

در این جا نیز مشابه حالت قبل فرض می کنیم مخرج کسر به صورت مربع کامل باشد شکل کلی انتگرال در این حالت به صورت زیر است:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + a^2)^n} dx$$

برای حل انتگرال بالا (مشابه حالت قبل) آن را به دو قسمت تفکیک می کنیم:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + a^2)^n} dx = \int \frac{Ax}{(x^2 + a^2)^n} dx + \int \frac{B}{(x^2 + a^2)^n} dx$$

برای حل دو انتگرال بالا از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم یعنی داریم:

$$\int \frac{Ax}{(x^2 + a^2)^n} dx \Rightarrow u = x^2 + a^2 \dots$$

$$\int \frac{B}{(x^2 + a^2)^n} dx \Rightarrow x = \tan t$$

دقت کنید انتگرال دوم از روش تغییر متغیر مثلثاتی حل می شود

مثال:

$$\int \frac{5x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{5x}{(x^2 + 1)^2} dx + \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

هر یک از انتگرال های بالا را به صورت جداگانه حل می کنیم:

$$\int \frac{5x}{(x^2 + 1)^2} dx \Rightarrow u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{5x}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{5x}{u^2} \frac{du}{2x} = \frac{5}{2} \int \frac{du}{u^2} = \frac{5}{2} \left(\frac{-1}{u} \right) = \frac{-5}{2(x^2 + 1)} + c$$

مشابه انتگرال دوم در فصل قبل حل شده است بنابراین در اینجا فقط جواب آخر آن را می نویسیم که به شکل زیر است:

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \left(\tan^{-1} x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + c$$

بنابراین جواب نهایی برابر است با:

$$\int \frac{5x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{-5}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \left(\tan^{-1} x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) + c$$

الکون که هر یک از چهار حالت بالا را به صورت جداگانه بررسی کردیم چند مثال کلی را با هم حل می کنیم

مثال: انتگرالهای داده شده را حل کنید

$$(a) \int \frac{dx}{x^2 - 1} \quad (b) \int \frac{x - 2}{x^2(1 + x)} dx \quad (c) \int \frac{x + 8}{x^3 + 4x} dx \quad (d) \int \sec x dx$$

حل: (مراحل بدست آوردن ثابتها ذکر نشده است)

(a) ابتدا کسر را تجزیه می کنیم:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \quad B = \frac{-1}{2}$$

$$(a) \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} dx + \int \frac{\frac{-1}{2}}{x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx$$

مشفیه که جواب هر دو انتگرال به صورت $\ln$ هست.

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + c$$

به طور کلی می توان نشان داد:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

اگر چه من اصلا از فرمول حفظ کردن خوشم نمیاد اما این فرمول واقعا بدردتون میفوره (بخصوص در امتحانات تستی)

حل (b): ابتدا کسر را تجزیه می کنیم (تجزیه این کسر رو قبلا انجام دادیم)

$$\frac{x-2}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1+x} \Rightarrow A = 3, B = -2, C = -3$$

$$\Rightarrow \int \frac{x-2}{x^2(1+x)} dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{1+x} \right) dx = 3 \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{1}{x^2} dx - 3 \int \frac{1}{1+x} dx$$

$$= 3 \ln|x| - 2 \left(\frac{-1}{x} \right) - 3 \ln|x+1| + c = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right|^3 + \frac{2}{x} + c$$

حل (c):

$$\frac{x+8}{x^3+4x} = \frac{x+8}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \Rightarrow A = 2, B = -2, C = 1$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int \frac{x+8}{x^3+4x} dx &= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{-2x+1}{x^2+4} \right) dx \\
&= \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{-2x+1}{x^2+4} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx \\
&\quad - \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \int \frac{1}{x^2+4} dx = 2 \ln|x| - \ln|x^2+4| + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} \\
&= \ln \left| \frac{x^2}{x^2+4} \right| + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$

حل: (d)

$$\begin{aligned}
(d) \int \sec x dx &= \int \frac{dx}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx \\
\Rightarrow u = \sin x \quad \Rightarrow du = \cos x dx \quad \Rightarrow dx &= \frac{du}{\cos x} \\
\int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx &= \int \frac{\cos x}{1 - u^2} \frac{du}{\cos x} = \int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{1-u} = \\
&= \frac{1}{2} \ln|1+u| - \frac{1}{2} \ln|1-u| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + c \\
\Rightarrow \int \sec x dx &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + c
\end{aligned}$$

خب، این هم از شکل سوم جواب انتگرال سکانت.

اما برای اینکه این جواب رو به صورت جواب اول بیان کنیم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \cdot \frac{1+\sin x}{1+\sin x} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x} \right| = \\
\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x} \right| &= \ln \left| \frac{1+\sin x}{\cos x} \right| = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} \right| = \ln |\sec x + \tan x|
\end{aligned}$$

مسائل فصل چهارم

۱- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

$$(1) \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$$

$$(2) \int \frac{7x+4}{3x+1} dx$$

$$(3) \int \frac{dx}{(3-x^2)}$$

$$(4) \int \frac{dx}{1+e^x}$$

$$(5) \int \frac{3x^3 - 7x^2 + 14}{x^2 - 3x + 5} dx$$

$$(6) \int \frac{dx}{x(x-1)^2}$$

$$(7) \int \frac{dx}{x^4 - a^4}$$

$$(8) \int \frac{x^2}{x-9} dx$$

$$(9) \int \frac{x}{3x^2 + 8x - 3} dx$$

$$(10) \int \frac{dx}{7x^2 - 8}$$

۲- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل مغ گرمی)

$$(1) \int \frac{dx}{1+x^3}$$

$$(2) \int \frac{x^2 + 7}{4x^5 + 4x^3 + x} dx$$

$$(3) \int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 8} dx$$

$$(4) \int \frac{x}{(x^2 - x + 1)^2} dx$$

$$(5) \int \frac{dx}{\cos x (1 + \sin x)}$$

$$(6) \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$$

$$(7) \int \frac{dx}{1+x^4}$$

$$(8) \int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x + 1}$$

فصل پنجم: انتگرال گیری به روش جزء به جزء

در این فصل یکی از زیباترین و مهمترین تکنیکهای انتگرال گیری به نام روش جزء به جزء را با هم فرا می گیریم این روش معمولا برای حل انتگرال هایی به صورت ضرب دو تابع به شکل زیر استفاده می شود

$$\int f(x) \cdot g(x) dx$$

که $f(x), g(x)$ توابعی از دو جنس مختلف هستند (مثلا حاصلضرب تابع چندجمله ای در مثلثاتی) چند نمونه از انتگرال هایی که با این روش مناسبه می شوند در جدول زیر نشان داده شده اند.

$\int x \cdot \sin(x) dx$	$\Rightarrow$	حاصلضرب تابع چندجمله ای در مثلثاتی
$\int x \cdot e^{2x} dx$	$\Rightarrow$	حاصلضرب تابع چندجمله ای در نمایی
$\int x \cdot \ln(x) dx$	$\Rightarrow$	حاصلضرب تابع چندجمله ای در لگاریتمی
$\int e^{3x} \cdot \sin(x) dx$	$\Rightarrow$	حاصلضرب تابع نمایی در مثلثاتی
$\int x \cdot \tan^{-1} x dx$	$\Rightarrow$	حاصلضرب تابع چندجمله ای در معکوس مثلثاتی

جدول (۱)

در روش جزء به جزء حل انتگرال داده شده در مساله به یک انتگرال ساده تر منجر می شود که حل آن را از قبل می دانیم. رابطه اصلی این روش به صورت زیر است:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

در رابطه بالا $\int u dv$ انتگرال داده شده در مساله است و $\int v du$ انتگرال ساده تری است که باید آن را حل کنیم

الکون مراحل این روش را با ذکر یک مثال به صورت قدم به قدم پی می گیریم

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر

$$\int x \cdot \cos x \, dx$$

قدم اول: یکی از توابع جلوی انتگرال را برابر u و تابع دیگر به همراه dx را برابر dv می گیریم

$$\int x \cdot \cos x \, dx \Rightarrow u = x, \quad dv = \cos x \, dx$$

قدم دوم: از u دیفرانسیل می گیریم تا du بدست آید و از dv انتگرال می گیریم تا v بدست آید

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos x \, dx \Rightarrow \int dv = \int \cos x \, dx \Rightarrow v = \sin x$$

قدم سوم: u, du, v, dv را در رابطه انتگرال گیری جزء به جزء جایگذاری کرده و انتگرال سمت راست را مناسبه می کنیم

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

$$\Rightarrow \int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx = x \cdot \sin x + \cos x + c$$

همانطور که ملاحظه می کنید انتگرال سمت راست (انتگرال سینوس) به راحتی مناسبه شد.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر

$$\int \ln x \, dx$$

قدم اول: در اینجا چون فقط یک تابع در جلوی انتگرال داریم همان را برابر u می گیریم و dv را برابر dx قرار می دهیم

$$u = \ln x, \quad dv = dx$$

قدم دوم:

$$u = \ln x \Rightarrow \text{دیفرانسیل} \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \Rightarrow \text{انتگرال} \quad v = x$$

قدم سوم:

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \left(\frac{1}{x} dx \right) = x \cdot \ln x - x = x(\ln x - 1) + c$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int x \cdot e^x dx$$

حل: در اینجا مسئله را به صورت فاصله حل می‌کنیم:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\Rightarrow \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x = e^x(x - 1) + c$$

آقا اجازه: از کجا بفهمیم که کدوم تابع رو u بگیریم؟ مثلاً همیشه در سوال بالا e^x رو برابر u بگیریم

استاد: عجب!! یه سوال به درد بخور پرسیدی!

بزار $u = e^x$ قرار بدیم ببینیم چی میشه؟

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$dv = x \, dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

حالا روابط بالا را در فرمول انتگرال گیری جزء به جزء جایگزین می‌کنیم:

$$\int x \cdot e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx$$

همانطور که ملاحظه می کنید مناسبه انتگرال سمت راست مشکل تر از انتگرال اولیه است بنابراین انتخاب $u = e^x$ مناسب نیست .

آقا اجازه: بالاخره کدوم تابع رو برابر u بگیریم؟

استاد: در حالت کلی همیشه جواب سوال بالا رو داد؟ اما بالاخره یه راههای میانبری وجود داره! پس موبایلتو خاموش کن و خوب گوش بده!

در کتابای مختلف یه سری راهنمایی برای انتخاب u وجود داره اما به نظر من زیاد دلچسب نیست بنابراین در اینجا یه قلق انتگرال فوری بهتون یاد میدم که در اکثر موارد جواب می ده. (البته این قلق رو جایی لو نرید بهتره دلیش رو بعدا بهتون می گم!)

اول از همه فرض کنید انتگرال ما به شکل زیر باشه

$$\int f(x) \cdot g(x) dx$$

حالا انتگرال هر یک از توابع رو به صورت جداگانه می نویسیم یعنی:

$$\int f(x) dx \quad \int g(x) dx$$

الکون دو حالت رو در نظر می گیریم:

حالت اول: اگر جواب هر دو انتگرال بالا را از فرمولهای پایه یا تعمیم یافته بدانیم آنوقت تابع ساده تر را برابر u می گیریم.

به عنوان مثال فرض کنیم انتگرال داده شده به صورت زیر باشد:

$$\int x \cdot \sin x dx$$

مثلاً انتگرال هر یک از دو تابع (یعنی $x, \sin x$) رو به صورت جداگانه می نویسیم:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} \quad \int \sin x dx = -\cos x$$

چون جواب هر دو انتگرال را می دانیم بنابراین از بین دو تابع $x, \sin x$ تابع ساده تر یعنی x را برابر u می گیریم.

حالت دوم: اگر جواب یکی از انتگرال ها را ندانیم همان تابع را برابر u می گیریم

به عنوان مثال فرض کنید انتگرال داده شده به صورت زیر باشد:

$$\int x \cdot \ln x dx$$

ابتدا انتگرال هر یک از توابع را به صورت جداگانه می نویسیم:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}, \quad \int \ln x dx = \text{نمیدانیم}$$

بنابراین چون جواب انتگرال $\ln x$ را نمی دانیم تابع $\ln x$ را برابر u می گیریم پس داریم:

$$u = \ln x, \quad dv = x dx$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int x \cdot e^{2x} dx$$

حل: ابتدا انتگرال هر یک از توابع را به صورت جداگانه می نویسیم:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}, \quad \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

چون جواب هر دو انتگرال را می دانیم تابع ساده تر یعنی x را برابر u می گیریم (البته قسمت بالا رو نوی چکنویس

بنویسید)

$$u = x \Rightarrow du = dx, \quad dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\Rightarrow \int x \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

$$\int x \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) + c$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

انتگرال داده شده را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \ln x dx \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln x \quad \int \ln x dx \Rightarrow \text{نمی دانیم}$$

$$\Rightarrow u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int dv = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow v = \ln x$$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x} dx$$

همانطور که می بینید انتگرال سمت راست همان انتگرال اولیه (سمت چپ) در اوامر بنابرین آن را به سمت چپ می

بریم:

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx + \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

البته انتگرال بالا را میشه از روش تغییر متغیر خیلی سریعتر حل کرد.

نکته مهم: برخی اوقات باید چند بار از روش جزء به جزء استفاده کرد یعنی برای مناسبه انتگرال سمت راست دوباره نیاز به انتگرال گیری جزء به جزء داریم.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

نمونه مناسبه رو خودتون انجام بدید:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx, \quad dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$\text{جایگزینی} \Rightarrow \int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \cdot \sin x \, dx$$

الکون برای مناسبه انتگرال سمت راست مجدداً از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم

$$\int x \cdot \sin x \, dx \Rightarrow \text{روش جزء به جزء}$$

$$\Rightarrow u = x \Rightarrow du = dx, \quad dv = \sin x \, dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\Rightarrow \int x \cdot \sin x \, dx = -x \cdot \cos x - \int (-\cos x) \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x$$

الکون با جایگزینی جواب انتگرال بالا در رابطه اصلی داریم:

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \cdot \sin x \, dx = x^2 \sin x - 2(-x \cdot \cos x + \sin x)$$

$$\Rightarrow \int x^2 \cos x \, dx = x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \sin x + c$$

البته انتگرال بالا را می‌توان از روشی به نام **روش جدول** به صورت ساده‌تر و سریع‌تری حل کرد که در ادامه فصل به آن اشاره می‌کنیم.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر

$$\int \arctan(x) dx$$

$$u = \arctan(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \arctan(x) dx &= x \cdot \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \end{aligned}$$

$$\int \arctan(x) dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

تذکره: یادآوردن باشه وقتی با یک انتگرال کسری مواجه شدید اول به مخرج کسر نگاه کنید...

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر

$$\int e^x \sin x dx$$

حل:

از آنجاییکه انتگرال هر دو تابع e^x و $\sin x$ را می دانیم قرار می دهیم:

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x \quad , \quad dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

همانطور که می بینید انتگرال سمت راست رابطه بالا جزء انتگرال های ساده نیست و برای حل آن باید دوباره از روش جزء به جزء استفاده کنیم. برای سادگی قرار می دهیم:

$$I_1 = \int e^x \sin x dx \quad , \quad I_2 = \int e^x \cos x dx$$

بنابراین رابطه بالا را می توان به صورت زیر نوشت:

$$I_1 = -e^x \cos x + I_2 \Rightarrow I_1 - I_2 = -e^x \cos x \quad (*)$$

اکنون به مناسبه انتگرال زیر می پردازیم:

$$I_2 = \int e^x \cos x dx$$

$$\Rightarrow u = e^x \Rightarrow du = e^x dx, \quad dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$\Rightarrow I_2 = e^x \sin x - I_1 \Rightarrow I_1 + I_2 = e^x \sin x \quad (**)$$

اکنون اگر دو رابطه (*) و (**) را به صورت دستگاه دو معادله دو مجهولی بنویسیم داریم:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 = -e^x \cos x \\ I_1 + I_2 = e^x \sin x \end{cases}$$

با جمع دو رابطه بالا داریم:

$$2I_1 = e^x(\sin x - \cos x) \Rightarrow I_1 = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$$

$$\Rightarrow I_1 = \int e^x \sin x dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$$

اکنون اگر دو رابطه را از هم کم کنیم داریم:

$$2I_2 = e^x(\sin x + \cos x) \Rightarrow I_2 = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2}$$

$$I_2 = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2}$$

تذکر مهم: این دو تا انتگرال و روش بدست آوردن آنها خیلی مهم است (بخصوص در دروس معادلات دیفرانسیل و

ریاضیات مهندسی)

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2}$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2}$$

در حالت کلی می توان نشان داد: (a, b اعدادی ثابت هستند)

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

ترکیب روش جزء به جزء با تغییر متغیر

برخی اوقات انتگرال داده شده را نمی توان مستقیماً از روش جزء به جزء حل کرد بلکه ابتدا باید از روش تغییر متغیر انتگرال را به شکل دلخواه در بیاوریم سپس از روش جزء به جزء استفاده کنیم.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int e^{\sqrt{x}} \, dx$$

حل: چون در جلوی انتگرال فقط یک تابع داریم بنابراین ناپاریم قرار دهیم:

$$u = e^{\sqrt{x}} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \, dx, \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\Rightarrow \int e^{\sqrt{x}} \, dx = x e^{\sqrt{x}} - \int \frac{x}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \, dx = x e^{\sqrt{x}} - \int \frac{\sqrt{x}}{2} e^{\sqrt{x}} \, dx$$

همانطور که می بینید انتگرال سمت راست از انتگرال اولیه مشکلتر شد بنابراین روش جزء به جزء در اینجا جواب نمیدهد.

الکتون برای رهایی از بن بست از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم:

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2t} dx \Rightarrow dx = 2t dt$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^t \cdot 2t dt = 2 \int t \cdot e^t dt$$

انتگرال بالا رو قبلا از روش جزء به جزء مناسبه کردیم که جواب به صورت زیر هست:

$$\int t \cdot e^t dt = e^t(t-1) \Rightarrow \int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t \cdot e^t dt = 2e^t(t-1)$$

بنابراین جواب نهایی به صورت زیر هست:

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + c$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int x^3 e^{-x^2} dx$$

انتگرال بالا را نمی توانیم بصورت سراسر از روش جزء به جزء حل کنیم (آکه بیکارید می تونید امتحان کنید!!) بنابراین

ابتدا به سراغ روش تغییر متغیر می رویم.

$$t = -x^2 \Rightarrow dt = -2x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{-2x}$$

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \int x^3 e^t \frac{dt}{-2x} = \frac{1}{2} \int -x^2 e^t dt = \frac{1}{2} \int t \cdot e^t dt$$

(انتگرال بالا قبلا مناسبه شده)

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int t \cdot e^t dt = \frac{1}{2} e^t(t-1) = \frac{-1}{2} e^{-x^2}(x^2+1) + c$$

انتگرال های ابتکاری

برخی از انتگرالها از روشهایی که تا اینجا به آنها اشاره کردیم قابل حل نیستند و برای حل آنها باید کمی ابتکار عمل به فرج داد (یعنی باید بیشتر مخ بسوزونید) البته تعداد این انتگرال ها بسیار کم است و معمولا سر و کله آنها فقط در امتحان پیدا می شود!!!

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{x \cdot e^x}{(1+x)^2} dx$$

حل:

$$\int \frac{x}{(1+x)^2} dx \Rightarrow \text{نمی دانیم}$$

$$\int e^x dx = e^x \Rightarrow \text{می دانیم}$$

در اینجا اگر مطابق روال قرار دهیم $u = \frac{x}{(1+x)^2}$ به جواب نمی رسیم بنابراین انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int \frac{x \cdot e^x}{(1+x)^2} dx = \int \frac{1}{(1+x)^2} x e^x dx$$

$$\int x \cdot e^x dx \Rightarrow \text{نمی دانیم}$$

$$\int \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{-1}{1+x} \Rightarrow \text{می دانیم}$$

دقت کنید انتگرال دوم با یک تغییر متغیر ساده حل می شود.

الکون داریم:

$$u = x \cdot e^x \Rightarrow du = (1+x)e^x$$

$$dv = \frac{1}{(1+x)^2} dx \Rightarrow v = \int \frac{1}{(1+x)^2} dx \Rightarrow t = 1+x \Rightarrow dt = dx$$

$$v = \int \frac{dt}{t^2} = \frac{-1}{t} \Rightarrow v = \frac{-1}{1+x}$$

اکنون با جایگذاری در رابطه انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\int \frac{x \cdot e^x}{(1+x)^2} dx = \frac{-x \cdot e^x}{1+x} + \int e^x dx = \frac{-x \cdot e^x}{1+x} + e^x = \frac{e^x}{1+x} + c$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int x^3 e^{-x^2} dx$$

حل:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Rightarrow \text{می دانیم} \quad \int e^{-x^2} dx \Rightarrow \text{نمی دانیم}$$

طبق روال باید قرار دهیم $u = e^{-x^2}$ اما این انتخاب به مشکل بر می خورد بنابراین انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int x^3 \cdot e^{-x^2} dx = \int x^2 \cdot x e^{-x^2} dx$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Rightarrow \text{می دانیم}$$

$$\int x e^{-x^2} dx = \frac{-1}{2} \int -2x \cdot e^{-x^2} dx = \frac{-1}{2} e^{-x^2} \Rightarrow \text{می دانیم}$$

بنابراین تابع ساده تر یعنی x^2 را برابر u می گیریم.

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx, \quad dv = x \cdot e^{-x^2} \Rightarrow v = \frac{-1}{2} e^{-x^2}$$

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{-x^2} dx &= \frac{-1}{2} e^{-x^2} \cdot x^2 - \int \frac{-1}{2} e^{-x^2} \cdot 2x dx = \frac{-1}{2} e^{-x^2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} e^{-x^2} \\ &= -\frac{e^{-x^2}}{2} (x^2 + 1) + c \end{aligned}$$

روش جردول

این روش در واقع حالت خاصی از روش جزء به جزء است که در درس معادلات دیفرانسیل و ریاضی مهندسی کاربرد زیادی دارد و باعث افزایش سرعت و سهولت محاسبات می گردد این روش زمانی قابل استفاده است که انتگرال داده شده به صورت زیر باشد.

$$\int (\text{چند جمله ای}) \begin{pmatrix} e^{\alpha x} \\ \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{pmatrix} dx$$

یعنی به صورت ضرب دو تابع که یکی از آنها متما چند جمله ای و دیگری مثلثاتی یا نمایی است به عنوان مثال انتگرال های زیر را می توان از روش جردول محاسبه کرد:

$$\int x \cdot \sin 2x \, dx \quad , \quad \int x^2 \cdot e^{5x} \, dx \quad , \quad \int 2x \cdot \cos 3x \, dx$$

اکنون مراحل کار در روش جردول را به صورت قدم به قدم توضیح می دهیم.

قدم اول: ابتدا از تابع چندجمله ای چندبار مشتق می گیریم تا برابر صفر شود و از تابع دیگر به همان تعداد انتگرال می گیریم سپس جردولی با دو ستون رسم کرده و تابع چندجمله ای و مشتقات آن را در ستون سمت چپ و تابع نمایی یا مثلثاتی به همراه انتگرالهای آن را در ستون سمت راست می نویسیم.

$f(x)$	$g(x)$
↓ مشتقات	↓ انتگرالها
صفر	

$f(x) \Rightarrow$ تابع چند جمله ای

$g(x) \Rightarrow$ تابع مثلثاتی یا نمایی

به عنوان مثال فرض کنید مناسبه انتگرال زیر خواسته شده باشد:

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = \sin x$$

ابتدا از x^2 مشتق می‌گیریم تا برابر صفر شود سپس به همان تعداد از $\sin x$ انتگرال می‌گیریم.

$$x^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x \xrightarrow{\text{مشتق}} 2 \xrightarrow{\text{مشتق}} 0$$

$$\sin x \xrightarrow{\text{انتگرال}} -\cos x \xrightarrow{\text{انتگرال}} -\sin x \xrightarrow{\text{انتگرال}} \cos x$$

x^2	$\sin x$
$2x$	$-\cos x$
2	$-\sin x$
0	$\cos x$

الکون مقادیر بالا را در جدول قرار می‌دهیم:

قدم دوم: در این مرحله دو ستون جدول را به صورت مورب با علامت یک در میان مثبت و منفی در هم ضرب کرده و سپس عملیات را با هم جمع می‌کنیم تا جواب انتگرال بدست آید.

x^2	$\sin x$
$2x$	$-\cos x$
2	$-\sin x$
0	$\cos x$

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx = + (x^2)(-\cos x) - (2x)(-\sin x) + (2)(\cos x) = 2x \cdot \sin x + (2 - x^2) \cos x$$

تذکره مهم: هنگام جمع کردن عملیات به علامت مثبت و منفی فلشها دقت کنید.

مثال: انتگرال زیر را از روش جدول مناسبه کنید:

$$\int x \cdot e^{2x} dx$$

حل: در اینجا راه حل انتگرال رو به صورت خلاصه بیان می کنیم.

x	e^{2x}
1	$\frac{e^{2x}}{2}$
0	$\frac{e^{2x}}{4}$

$$\Rightarrow \int x \cdot e^{2x} dx = +(x) \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2}\right) - (1) \left(\frac{e^{2x}}{4}\right) + c$$

$$\Rightarrow \int x \cdot e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

مثال: انتگرال زیر را از روش جدول مناسبه کنید:

x^2	$\cos 2x$
$2x$	$\frac{1}{2} \sin 2x$
2	$-\frac{1}{4} \cos 2x$
0	$-\frac{1}{8} \sin 2x$

$$\int x^2 \cdot \cos(2x) dx$$

حل: باز هم تاکید می کنم هواستون به علامت ها باشه!!

$$\int x^2 \cdot \cos(2x) dx =$$

$$= +(x^2) \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) - (2x) \left(\frac{-1}{4} \cos 2x\right) + (2) \left(\frac{-1}{8} \sin 2x\right)$$

$$\Rightarrow \int x^2 \cdot \cos(2x) dx = \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

مسائل فصل پنجم

۱- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

$$(1) \int \sin^{-1}(x) dx$$

$$(2) \int \sin(\ln x) dx$$

$$(3) \int x \cdot \sec^2 x dx$$

$$(4) \int x \cdot \tan^{-1}(x) dx$$

$$(5) \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$$

$$(6) \int (x^3 - 14)e^{-2x} dx$$

$$(7) \int x \cdot \sec x \cdot \tan x dx$$

$$(8) \int x \cdot e^{\sqrt{x}} dx$$

$$(9) \int e^{3x} \cdot \cos 4x dx$$

$$(10) \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

۲- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل مخ گرمی)

$$(1) \int \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$(2) \int x \cdot e^x \cdot \sin x dx$$

$$(3) \int x \cdot \sin^{-1}(x) dx$$

$$(4) \int \sec x \cdot \tan^2 x dx$$

$$(5) \int \frac{\sin^2 x}{e^x} dx$$

$$(6) \int (\sin^{-1} x)^2 dx$$

$$(7) \int \sec^3 x dx$$

$$(8) \int x \cdot (\tan^{-1} x)^2 dx$$

$$(9) \int \sin x \cdot \ln(\tan x) dx$$

$$(10) \int x \cdot \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) dx$$

فصل ششم: انتگرالهای مثلثاتی

در فصول گذشته برخی از انتگرال های ساده مثلثاتی را با هم مرور کردیم در این فصل برخی دیگر از این انتگرال ها را با هم بررسی می کنیم که عموماً شامل توانهای سینوس و کسینوس می شوند در این قسمت طبق روال مرسوم در اکثر کتابهای ریاضی، برای سادگی کار انتگرال های مثلثاتی را دسته بندی می کنیم.

دسته اول: انتگرال توانهای زوج سینوس و کسینوس

شکل کلی این انتگرال ها به صورت زیر است: (k یک عدد مثبت فرض می شود)

$$\int \sin^{2k} x \, dx \quad \int \cos^{2k} x \, dx$$

برای حل انتگرال های بالا باید از شر توانهای زوج خلاص بشیم به همین خاطر از فرمولهای عمومی موسوم به روابط

کاهش توان استفاده می کنیم که به منظور یادآوری مجدداً اونها رو براتون می نویسم:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

یادآوری ۱۲

آقا اجازه: اگر جلوی سینوس یا کسینوس به جای x به عبارت دیگه بود پیکار کنیم؟

استاد: ببین فرقی نمیکنه هرچی جلوی سینوس یا کسینوس باشه وقتی توان ۲ اون از بین میره دوبرابر میشه به عنوان

مثال:

$$\sin^2 3x = \frac{1 - \cos 6x}{2} \quad , \quad \sin^2(\ln x) = \frac{1 - \cos(2\ln x)}{2}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \cos^2 x \, dx$$

حل: این انتگرال رو قبلا در فصل دوم حل کردیم اما به خاطر اهمیتی که داره دوباره حلش می کنیم:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \\ \Rightarrow \int \cos^2 x \, dx &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c = \frac{1}{2} (x + \sin x \cdot \cos x) + c \end{aligned}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \sin^4 x \, dx$$

حل:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= \int (\sin^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx = \\ &= \int \frac{1 + \cos^2 2x - 2 \cos 2x}{4} \, dx = \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \end{aligned}$$

برای مناسبه انتگرال دوم باید دوباره از رابطه کاهش توان استفاده کنیم.

$$\begin{aligned} \cos^2 2x &= \frac{1 + \cos 4x}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \sin^4 x \, dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \left(x + \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{\sin 2x}{4} + c = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

دسته دوم: انتگرال توانهای فرد سینوس و کسینوس

شکل کلی این انتگرال ها به صورت زیر است (k یک عدد مثبت فرض می شود)

$$\int \sin^{2k+1} x \, dx \quad \int \cos^{2k+1} x \, dx$$

برای حل این انتگرال ها به صورت زیر عمل می کنیم:

ابتدا سینوس یا کسینوس را به صورت زیر تفکیک می کنیم:

$$\sin^{2k+1} x = \sin^{2k} x \cdot \sin x, \quad \cos^{2k+1} x = \cos^{2k} x \cdot \cos x$$

به عنوان مثال:

$$\sin^5 x = \sin^4 x \cdot \sin x, \quad \cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x$$

در مرحله بعد با استفاده از اتحاد $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ سینوس را بر حسب کسینوس و کسینوس را بر حسب سینوس می نویسیم

$$\sin^{2k+1} x = \sin^{2k} x \cdot \sin x = (\sin^2 x)^k \cdot \sin x = (1 - \cos^2 x)^k \cdot \sin x$$

$$\cos^{2k+1} x = \cos^{2k} x \cdot \cos x = (\cos^2 x)^k \cdot \cos x = (1 - \sin^2 x)^k \cdot \cos x$$

و در آخر برای انتگرال سینوس از تغییر متغیر $u = \cos x$ و برای انتگرال کسینوس از تغییر متغیر $u = \sin x$ استفاده می کنیم.

الکون مراحل بالا را به صورت فاصله باز نویسی می کنیم:

$$\begin{aligned} \int \sin^{2k+1} x \, dx &= \int \sin^{2k} x \cdot \sin x \, dx = \int (\sin^2 x)^k \cdot \sin x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cdot \sin x \, dx \Rightarrow u = \cos x \dots \end{aligned}$$

به همین ترتیب برای انتگرال کسینوس داریم:

$$\begin{aligned}\int \cos^{2k+1} x \, dx &= \int \cos^{2k} x \cdot \cos x \, dx = \int (\cos^2 x)^k \cdot \cos x \, dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x)^k \cdot \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad u = \sin x \dots\end{aligned}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \cos^3 x \, dx$$

حل:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \, dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x \, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x \, dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx\end{aligned}$$

$$\Rightarrow u = \sin x \quad du = \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\begin{aligned}\int (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx &= \int (1 - u^2) \cdot \cos x \cdot \frac{du}{\cos x} = \int (1 - u^2) \, du \\ &= u - \frac{u^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c\end{aligned}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \sin^5 x \, dx$$

حل:

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \, dx &= \int \sin^4 x \cdot \sin x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 \cdot \sin x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \sin x \, dx\end{aligned}$$

$$\Rightarrow u = \cos x \quad du = -\sin x \, dx \quad \Rightarrow \, dx = \frac{-du}{\sin x}$$

$$\begin{aligned} \int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \sin x \, dx &= \int (1 - u^2)^2 \cdot \sin x \frac{-du}{\sin x} = - \int (1 - u^2)^2 \, du \\ &= - \int (1 + u^4 - 2u^2) \, du = - \left(u + \frac{u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} \right) \\ &= - \left(\cos x + \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{2\cos^3 x}{3} \right) + c \end{aligned}$$

دسته سوم: انتگرال‌های به فرم $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$ وقتی توانها اعداد صحیح مثبت باشند

این دسته از انتگرال‌ها خود شامل دو حالت می‌شوند که عبارتند از:

حالت ۱: وقتی حداقل یکی از توانها فرد باشند.

در این حالت تابعی که توان فرد دارد را مانند دسته دوم تفکیک کرده و از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx$$

حل: دقت کنید در اینجا کسینوس توان فرد دارد بنابراین انتگرال را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \, dx = \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx$$

$$u = \sin x \quad \Rightarrow \quad du = \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx = \int u^2 \cdot (1 - u^2) \cdot \cos x \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int u^2 \cdot (1 - u^2) \, du = \int (u^2 - u^4) \, du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

حالت ۲: وقتی توان هر دو تابع سینوس و کسینوس زوج باشد.

در این حالت مانند دسته اول از فرمولهای کاهش توان استفاده می کنیم.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$$

حل:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx = \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx \\ &= \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + c \end{aligned}$$

دسته چهارم: انتگرال حاصلضرب سینوس و کسینوس

این انتگرال ها خود شامل سه حالت می شوند که عبارتند از:

$$(a) \int \sin(\alpha x) \cdot \sin(\beta x) \, dx$$

$$(b) \int \cos(\alpha x) \cdot \cos(\beta x) \, dx$$

$$(c) \int \sin(\alpha x) \cdot \cos(\beta x) \, dx$$

برای حل انتگرال های بالا از روابط تبدیل حاصلضرب به جمع استفاده می کنیم بنابراین جهت یادآوری این روابط را در

زیر می نویسیم:

یادآوری ۱۳

$$\sin(\alpha x) \cdot \sin(\beta x) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x]$$

$$\cos(\alpha x) \cdot \cos(\beta x) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x]$$

$$\sin(\alpha x) \cdot \cos(\beta x) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x]$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \sin(7x) \cdot \cos(5x) dx$$

حل: ابتدا حاصلضرب بالا را به حاصل جمع تبدیل می‌کنیم:

$$\sin(7x) \cdot \cos(5x) = \frac{1}{2} [\sin(7+5)x + \sin(7-5)x] = \frac{1}{2} [\sin(12x) + \sin(2x)]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \sin(7x) \cdot \cos(5x) dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(12x) + \sin(2x)] dx \\ &= \frac{-1}{2} \left(\frac{\cos(12x)}{12} + \frac{\cos(2x)}{2} \right) + c \end{aligned}$$

دسته پنجم: مناسبه انتگرالی به فرم $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ وقتی یکی از توانها منفی یا کسری باشد

این دسته از انتگرالها خود شامل سه حالت می‌شوند که عبارتند از :

۱- اگر n (توان کسینوس) یک عدد فرد باشد از تغییر متغیر $\sin x = t$ استفاده می‌کنیم.۲- اگر m (توان سینوس) یک عدد فرد باشد از تغییر متغیر $\cos x = t$ استفاده می‌کنیم.۳- اگر $m+n$ زوج باشد از تغییر متغیر $\tan x = t$ یا $\cot x = t$ استفاده می‌کنیم.

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$$

حل:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx = \int \cos^3 x \cdot \sin^{-6} x dx \Rightarrow n = 3, \quad m = -6$$

چون n فرد است از تغییر متغیر $\sin x = t$ استفاده می کنیم:

$$\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx &= \int \frac{\cos^3 x}{t^6} \frac{dt}{\cos x} = \int \frac{\cos^2 x}{t^6} dt = \int \frac{1-t^2}{t^6} dt \\ &= \int \frac{1}{t^6} dt - \int \frac{1}{t^4} dt = \frac{t^{-5}}{-5} - \frac{t^{-3}}{-3} + c = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{5t^5} + c \\ &\Rightarrow \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx = \frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{5\sin^5 x} + c \end{aligned}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$$

حل:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^{-6} x dx \Rightarrow n = -6, m = 2 \Rightarrow m + n = \text{زوج}$$

چون زوج $m + n =$ بنابراین از تغییر متغیر $\tan x = t$ استفاده می کنیم:

$$\tan x = t \Rightarrow (1 + \tan^2 x) dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{1 + \tan^2 x} = \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^4 x} dx = \int \tan^2 x \cdot (1 + \tan^2 x)^2 dx \\ &= \int t^2 \cdot (1 + t^2)^2 \frac{dt}{1 + t^2} = \int t^2 (1 + t^2) dt = \int (t^2 + t^4) dt \\ &= \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + c = \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$$

حل:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx = \int \sin^3 x \cdot \cos^{-\frac{2}{3}} x dx \Rightarrow n = -\frac{2}{3}, m = 3$$

چون m فرد است از تغییر متغیر $\cos x = t$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sin x}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx &= \int \frac{\sin^3 x}{t^{\frac{2}{3}}} \left(-\frac{dt}{\sin x} \right) = - \int \frac{\sin^2 x}{t^{\frac{2}{3}}} dt = - \int \frac{1 - t^2}{t^{\frac{2}{3}}} dt \\ &= - \int \left(\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} - \frac{t^2}{t^{\frac{2}{3}}} \right) dt = - \int t^{-\frac{2}{3}} dt + \int t^{\frac{4}{3}} dt = -3t^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{7} t^{\frac{7}{3}} + c \\ &= -3\sqrt[3]{\cos x} + \frac{3}{7} \sqrt[3]{\cos^7 x} + c \end{aligned}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x}$$

حل:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \cos^{-4} x \, dx \Rightarrow n = -4, m = 0 \Rightarrow m + n = \text{زوج} \\ \tan x = t &\Rightarrow (1 + \tan^2 x) dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{1 + \tan^2 x} = \frac{dt}{1 + t^2} \\ \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 dx = \int (1 + t^2)^2 \cdot \frac{dt}{1 + t^2} = \int (1 + t^2) dt \\ &= t + \frac{t^3}{3} + c = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

مثال: مطلوبست مناسبه انتگرال زیر:

$$\int \tan^3 x \, dx$$

حل:

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x \, dx &= \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx \Rightarrow n = -3, m = 3 \Rightarrow m + n = \text{زوج} \\ t = \tan x &\Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x) dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{(1 + t^2)} \\ \int \tan^3 x \, dx &= \int t^3 \cdot \frac{dt}{(1 + t^2)} = \int \frac{t^3}{(1 + t^2)} dt \\ &= \int \left(t - \frac{t}{1 + t^2} \right) dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) + c \\ &= \frac{\tan^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + \tan^2 x) + c \end{aligned}$$

مسائل فصل ششم

۱- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

(1) $\int \sin 5x \cdot \cos 2x \, dx$

(2) $\int \sin 3x \cdot \sin x \, dx$

(3) $\int \cos 6x \cdot \cos x \, dx$

(4) $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx$

(5) $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x \, dx$

(6) $\int \cos^4 x \, dx$

(7) $\int \frac{1}{\sin^4 x} \, dx$

(8) $\int \cos^5 x \, dx$

۲- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل مخ گرمی)

(1) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} \, dx$

(2) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} \, dx$

(3) $\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \, dx$

(4) $\int \cot^6 x \, dx$

(5) $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} \, dx$

(6) $\int \frac{dx}{\cos^4 x \cdot \sin^2 x}$

(7) $\int \tan^7 x \, dx$

(8) $\int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \, dx$

جزوه عرفانیان

این قسمت به فایل PDF جداگانه‌ای با عنوان «جزوه عرفانیان» اشاره دارد. لطفاً فایل Jozveh_Erfaniyan.pdf را در کنار این فایل قرار دهید. این جزوه شامل مباحث عرفانی و اخلاقی در مدیریت با نگاهی به آموزه‌های دینی است.

تقدیر و تشکر

از خداوند متعال، از خانواده محترم و از دانشجویان عزیز مجتمع آموزش عالی گناباد که با پرسش‌های هوشمندانه خود باعث پربارتر شدن این جزوه شدند، سپاسگزارم. همچنین از معاونت پژوهش و فناوری مجتمع که زمینه چاپ این اثر را فراهم آوردند، قدردانی می‌شود. إن شاء الله که این تلاش کوچک مقبول درگاه حق افتد.